Corrigé

de l'épreuve commune e3c

de mathématiques

en Première Spécialité Maths

Spécimen 4 pour préparer le bac 2021

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 : Les bonnes réponses sont :

1) b 2) c 3) a 4) c 5) b

→ avec quelques explications (et des rappels de cours !)

⚠ ce QCM n'est pas si facile du tout ⚠

Question 1 : on applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$

avec $u(x) = x+1$ $v(x) = e^x$
$u'(x) = 1$ $v'(x) = e^x$

→ on obtient $f'(x) = 1 \times e^x + (x+1)e^x$
$= e^x(1+x+1) = e^x(x+2)$

→ réponse $\boxed{b}$.

Question 2 : les propriétés de calculs pour e^x sont similaires à celle des puissances.

→ on a $\dfrac{e^a}{e^{-b}} = e^{a-(-b)} = e^{a+b}$ et là, il faut réfléchir !

$= e^{b+a} = e^{b-(-a)} = \dfrac{e^b}{e^{-a}}$ → réponse $\boxed{c}$.

Question 3 : il y a 3 méthodes pour répondre.

→ un peu de recul !

La suite est décroissante car on a $U_6 < U_3$.

Donc la raison R est négative et on aura forcément U_0 qui sera supérieur à U_3 $\left(= \frac{5}{2}\right)$.

La seule proposition cohérente est la réponse $\boxed{a}$.

→ on peut tester !!

On prend les valeurs de U_0 et R proposées et on vérifie les résultats de U_3 et U_6 avec

$$U_3 = U_0 + (3-0) \times R = U_0 + 3R$$

$$\text{et } U_6 = U_0 + (6-0) \times R = U_0 + 3R$$

Seule la proposition $\boxed{a}$ convient.

→ on peut chercher à trouver R et U_0

On utilise $U_6 = U_3 + (6-3) \times R \rightarrow 3 = \frac{9}{2} + 3R$

→ on obtient $R = \frac{3 - 9/2}{3} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

et $U_0 = U_3 + (0-3) \times R = \frac{9}{2} - 3 \times (-\frac{1}{2}) = \boxed{6}$

→ réponse $\boxed{a}$.

Question 4 : pour bien comprendre un algorithme, il faut le faire "tourner" à la main !!

La variable i va varier de 1 à 50 et on a :

i		1	2	3	4	5	....
s	0	1	3	6	10	15	...
		0+1	1+2	3+3	6+4	10+5	

⚠ L'instruction range(51) arrête ses boucles à 50 et non à 51 !!

→ on voit que s correspond à 1+2+3+....

c'est la somme de termes d'une suite arithmétique

soit $s = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2} \times \text{nombre de terme}$

soit $s = \frac{(1+50)}{2} \times 50 = 1275$ → réponse $\boxed{c}$.

Question 5 : Le terme "valeur exacte" écarte, à priori, les réponses a et d.

La somme cherchée est une somme de termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $(\frac{1}{2})^0 = 1$.

On obtient : $S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

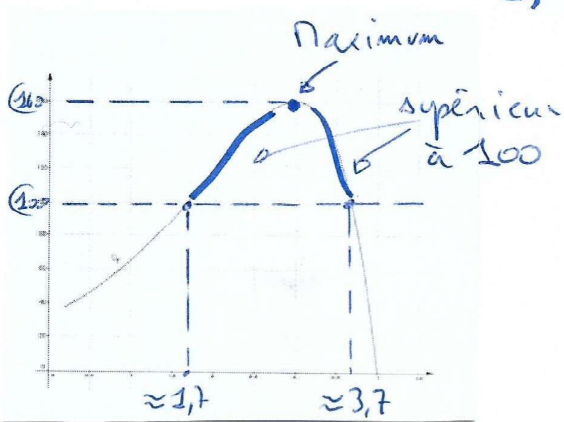
soit $S = 1 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^{16}}{1 - \frac{1}{2}}$ il y a 16 termes car on commence à la puissance 0.

→ $S = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{16}}{\frac{1}{2}} = 2(1 - (\frac{1}{2})^{16}) = 2 - \frac{2}{2^{16}} = 2 - \frac{1}{2^{15}}$

→ réponse $\boxed{b}$.

Exercice 2 :

Partie A : 1) La puissance maximale est 160 Watts



2) La puissance dépasse 100 watts entre (environ) 1,7 et 3,7 soit pendant un temps environ égal à 2 dixièmes de seconde

Partie B : 1) on a $e^x > 0$ pour tout x

Donc on étudie le signe de $(-8x+24)$

$\longrightarrow -8x+24=0 \longrightarrow x=3$

x	0,2		3		4
$-8x+4$		+	0	−	
e^x		+	|	+	
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

attention aux signes de cette fonction affine de coefficient négatif.

2) Le maximum de f est égal à $f(3)$

valeur exacte

$\longrightarrow$ on obtient $f(3) = (-8\times 3+32)e^3 = \boxed{8e^3}$

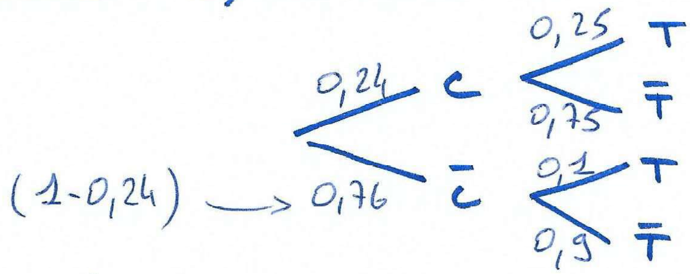
$\simeq 160,68$ Watts

Et avec une augmentation de 5%, il suffit de multiplier par le coefficient multiplicateur $\left(1+\frac{5}{100}\right)$ soit 1,05 !

Avec plein de méthodes différentes, on constate avec sa calculatrice que $8e^3\times(1,05)^5 > 200$

$\longrightarrow$ après 5 mois (soit 5 augmentations), la meilleure performance dépassera 200 W.

Exercice 3 : 1) on obtient l'arbre suivant



2) on cherche $p(C \cap T) = p(C) \times p_C(T)$

$= 0{,}24 \times 0{,}25 = 0{,}06$.

3) on applique la formule des probabilités totales

$p(T) = p(C \cap T) + p(\overline{C} \cap T)$

$= 0{,}06 + 0{,}76 \times 0{,}1 = 0{,}136$

4) a) on obtient la loi de probabilité suivante

x_i	0	300	1000	1300
p_i	0,684	0,076	0,18	0,06

→ la somme est bien égale à 1.

- 0,684 : ni canapé ni table soit $p(\overline{C} \cap \overline{T})$
- 0,076 : table mais pas canapé soit $p(\overline{C} \cap T)$
- 0,18 : canapé mais pas table soit $p(C \cap \overline{T})$
- 0,06 : canapé et table soit $p(C \cap T)$

b) on calcule $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4$

→ $E(X) = 0{,}684 \times 0 + 0{,}076 \times 300 + 0{,}18 \times 1000 + 0{,}06 \times 1300$

$= 280{,}8$ €

→ c'est la somme moyenne que dépensera un client.

→ c'est la somme que peut "espérer" le magasin (en moyenne) pour chaque client.

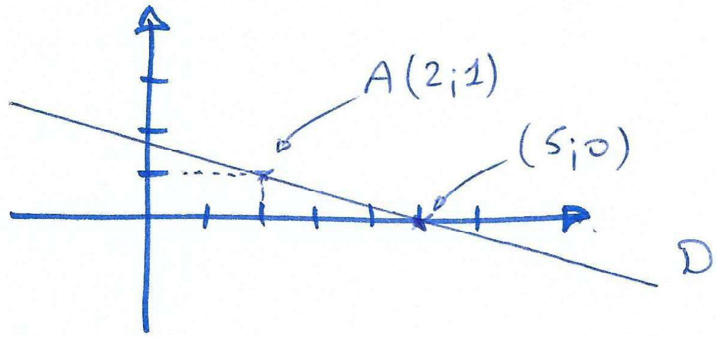
Exercice 4 : 1) on remplace x et y par les coordonnées de A

$\rightarrow \underset{x_A}{2} + 3 \times \underset{y_A}{1} - 5 = 2 + 3 - 5 = 0$

$\longrightarrow A \in (D)$.

Pour tracer la droite, il nous faut un deuxième point.
Mais attention avec la division par 3 avec le $\boxed{3y}$!
On peut, par exemple, remplacer y par 0 et on trouve $x + 3 \times 0 - 5 = 0$ soit $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$

$\rightarrow$ on a un deuxième point de coordonnées $(5;0)$.



2) on remplace x et y dans l'équation de D' par les coordonnées du point B

$\rightarrow 3 \times \underset{x_B}{4} - \underset{y_B}{2} - 10 = 12 - 2 - 10 = 0$

Donc $B \in (D')$

et pour montrer que $D \perp D'$, on prend un vecteur directeur $\begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix}$ de chaque droite et on vérifie que leur produit scalaire est nul !

On a : $\vec{v_D} \begin{vmatrix} -b = -3 \\ a = 1 \end{vmatrix}$ et $\vec{v_{D'}} \begin{vmatrix} -b = -(-1) = 1 \\ a = 3 \end{vmatrix}$

soit $\vec{v_D} \cdot \vec{v_{D'}} = \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} = -3 \times 1 + 1 \times 3$
$= -3 + 3 = 0$!

$\rightarrow$ on a bien $D \perp D'$.

3) Les coordonnées $(x;y)$ du point H doivent vérifier :

* $H \in \mathcal{D}$ soit $x+3y-5=0$
* $\overrightarrow{BH} \perp \vec{v}_D$ soit $\overrightarrow{BH}\cdot\vec{v}_D = 0$ avec $\overrightarrow{BH}\left|\begin{array}{l} x_H - x_B = x-4 \\ y_H - y_B = y-2 \end{array}\right.$

et $\vec{v}_D \left|\begin{array}{l} -3 \\ 1 \end{array}\right.$

on obtient : $\overrightarrow{BH}\cdot\vec{v}_D = (x-4)\times(-3) + (y-2)\times 1 = 0$

soit $-3x+12+y-2=0 \rightarrow -3x+y+10=0$

on doit donc résoudre le système (méthode à revoir !)

$$\begin{cases} x+3y-5=0 \\ -3x+y+10=0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x+3y=5 \\ -3x+y=-10 \end{cases}$$

on trouve comme solution : $x=\frac{7}{2}$ et $y=\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{H\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)}$

4) a) Pour l'équation de $\mathcal{C}$, il nous faut les coordonnées du centre Ω, qui est le milieu de $[AB]$

$$\rightarrow \Omega \left|\begin{array}{l} \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

et il nous faut le rayon R qui, par exemple, est égal à $\frac{AB}{2}$ avec $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$= \sqrt{(4-2)^2+(2-1)^2} = \sqrt{5} \rightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

On obtient pour $\mathcal{C}$: $(x-\underset{x_\Omega}{3})^2 + (y-\underset{y_\Omega}{\frac{3}{2}})^2 = \frac{5}{4}$

$R^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

b) Pour que H appartienne à $\mathcal{C}$, il faut que ces coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{C}$

$\rightarrow \left(\underset{x_H}{\frac{7}{2}}-3\right)^2 + \left(\underset{y_H}{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 = \frac{5}{4}$!

$\rightarrow H \in \mathcal{C}$!!