Comment retrouver les coordonnées d'un point : une application

La question à savoir résoudre

On connait les coordonnées des points A (3 ; - 4), B (5 ; 1) et C (- 2 ; 0).
On veut retrouver les coordonnées d'un point M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\,\overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{AC}$.

La méthode

. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
. On calcule ensuite les coordonnées de $2\,\overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{AC}$.
. Sachant que l'on doit avoir l'égalité $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\,\overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{AC}$, cela signifie que le vecteur $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$ a les mêmes coordonnées que le résultat obtenu pour $2\,\overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{AC}$.
. On exprime alors les coordonnées de $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$ en fonction de x_M et de y_M , et il nous reste à résoudre deux équations : une équation pour trouver x_M et une autre équation pour trouver y_M .

On reprend maintenant notre énoncé

On connait les coordonnées des points A (3 ; - 4), B (5 ; 1) et C (- 2 ; 0).
On veut retrouver les coordonnées d'un point M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\,\overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{AC}$.

* On a $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A = 5-3 = 2 \\ y_B - y_A = 1-(-4) = 5 \end{array}\right.$ et $\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l} x_C - x_A = -2-3 = -5 \\ y_C - y_A = 0-(-4) = 4 \end{array}\right.$

On obtient $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2\times\left|\begin{array}{l} 2 \\ 5 \end{array}\right. - 3\times\left|\begin{array}{l} -5 \\ 4 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 2\times 2 - 3\times(-5) = 19 \\ 2\times 5 - 3\times 4 = -2 \end{array}\right.$

* On a $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \left|\begin{array}{l} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{array}\right. + \left|\begin{array}{l} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} x_M - 3 \\ y_M - (-4) \end{array}\right. + \left|\begin{array}{l} x_M - 5 \\ y_M - 1 \end{array}\right.$

On obtient $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \left|\begin{array}{l} x_M - 3 + x_M - 5 = 2x_M - 8 \\ y_M + 4 + y_M - 1 = 2y_M + 3 \end{array}\right.$

* On veut $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ soit $\left\{\begin{array}{l} 2x_M - 8 = 19 \\ 2y_M + 3 = -2 \end{array}\right.$

On résout les équations :

$2x_M - 8 = 19 \rightarrow 2x_M = 27 \rightarrow x_M = 27/2 = 13,5$

$2y_M + 3 = -2 \rightarrow 2y_M = -5 \rightarrow y_M = -5/2 = -2,5$

Les coordonnées du point M seront donc :

$M\left|\begin{array}{l} 27/2 \\ -5/2 \end{array}\right.$ ou $M\left(\frac{27}{2} ; -\frac{5}{2}\right)$