Définition de la colinéarité , vecteurs colinéaires

Définitions (il y en a deux possibles)

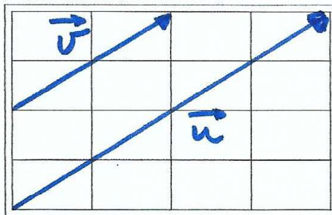
1 - Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la ***même direction***
(*on pourrait dire "les vecteurs sont parallèles" par abus de langage*).
2 - Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\ \vec{v}$
(*les deux vecteurs sont liés par ce nombre k qui est le coefficient de colinéarité*).

Conséquences :
Des vecteurs ***égaux*** sont ***colinéaires*** car on a $\vec{u} = \vec{v}$ (*le coefficient k est alors égal à 1*).
Des vecteurs ***opposés*** sont ***colinéaires*** car on a $\vec{u} = -\ \vec{v}$ (*le coefficient k est alors égal à -1*).

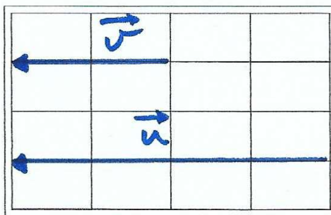
Quelques exemples

On va donner quelques exemples de vecteurs colinéaires, en exprimant à chaque fois le rapport de colinéarité k qui existe entre les deux vecteurs.

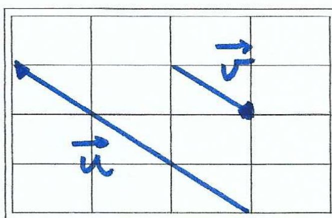
Pour exprimer la colinéarité entre deux vecteurs, il faudra :
- bien avoir deux vecteurs ayant la ***même direction*** (on observe un ***parallélisme***).
- avec la longueur de chacun des vecteurs, on trouve un rapport de longueurs entre les deux.
- si les deux vecteurs ont le ***même sens***, le coefficient de colinéarité sera ***positif***.
  si les deux vecteurs ont un ***sens opposé***, le coefficient de colinéarité sera ***négatif***.



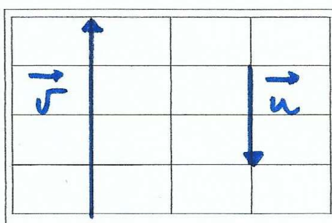
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
et on a $\vec{u} = 2\ \vec{v}$
$\vec{u}$ est deux fois plus grand que $\vec{v}$



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
et on a $\vec{u} = 2\ \vec{v}$



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
et on a $\vec{u} = -3\ \vec{v}$
les vecteurs ont un sens opposé



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
et on a $\vec{u} = -0{,}5\ \vec{v}$
(cette fois, $\vec{u}$ est plus petit que $\vec{v}$!)
on aurait pu écrire $\vec{v} = -2\ \vec{u}$.

Comment montrer que des vecteurs sont colinéaires
Méthode 1 (proportionnalité des coordonnées)

Description générale

Pour savoir si deux vecteurs (non nuls) $\vec{u}$ $(x\,;y)$ et $\vec{v}$ $(x'\,;y')$ sont ***colinéaires***, on va ici directement chercher le rapport de colinéarité k qui permettra d'écrire $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Pour cela, en prenant $\vec{v}$ comme celui qui a les "*plus grandes valeurs*", on calcule les rapports $\dfrac{x'}{x}$ et $\dfrac{y'}{y}$.
L'idée étant d'écrire des rapports avec les "plus grandes valeurs" au numérateur.

→ si les deux rapports sont ***égaux***, alors les deux vecteurs sont ***colinéaires*** (et la valeur du rapport correspond au ***coefficient de colinéarité k***). Cela correspond à une ***proportionnalité*** des coordonnées.
→ si les deux rapports ***ne sont pas égaux***, alors les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

L'avantage de cette méthode est de permettre d'exprimer le lien existant entre les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

Exemple 1 : avec les vecteurs $\vec{u}$ (6 ; - 8) et $\vec{v}$ (- 9 ; 12)
→ *le vecteur* $\vec{v}$ *est celui qui a les "plus grandes valeurs". On mettra ses coordonnées au numérateur.*

On calcule $\dfrac{-9}{6} = -1,5$ et $\dfrac{12}{-8} = -1,5$

on obtient le même résultat :
les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
et on a $\vec{v} = -1,5\,\vec{u}$

Exemple 2 : avec les vecteurs $\vec{u}$ (- 5 ; 4) et $\vec{v}$ (- 7 ; 6)
→ *le vecteur* $\vec{v}$ *est celui qui a les "plus grandes valeurs". On mettra ses coordonnées au numérateur.*

on calcule $\dfrac{-7}{-5} = 1,4$ et $\dfrac{6}{4} = 1,5$

On n'obtient pas le même résultat :
les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Exemple 3 : avec les vecteurs $\vec{u}$ (9 ; - 13,5) et $\vec{v}$ (- 4 ; 6)
→ *attention, cette fois, c'est le vecteur* $\vec{u}$ *qui a les "plus grandes valeurs". On mettra ses coordonnées au numérateur.*

On calcule $\dfrac{9}{-4} = -2,25$ et $-\dfrac{13,5}{6} = -2,25$

on obtient le même résultat :
les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
et on a $\vec{u} = -\dfrac{9}{4}\vec{v}$ ou $\vec{u} = -2,25\,\vec{v}$

c'est bien $\vec{u}$ le plus grand vecteur ici !

Comment montrer que des vecteurs sont colinéaires
Méthode 2 (avec le déterminant)

Description générale

Pour savoir si les vecteurs (non nuls) $\vec{u}\ (x\,;y)$ et $\vec{v}\ (x'\,;y')$ sont ***colinéaires***, on va utiliser une méthode utilisant le ***déterminant*** (c'est en fait un "*produit en croix*"). Cela va nous permettre de vérifier si les coordonnées des vecteurs sont *proportionnelles*, ce qui entrainera la colinéarité des vecteurs.

Dans la pratique, pour savoir si les vecteurs (non nuls) $\vec{u}\ (x\,;y)$ et $\vec{v}\ (x'\,;y')$ sont *colinéaires*,
on calcule le déterminant suivant : $x \times y' - x' \times y$
→ si ce déterminant est égal à 0 alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
→ si ce déterminant n'est pas égal à 0 alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Entre les deux méthodes, c'est elle la plus souvent utilisée car elle est pratique et mémorisable mais elle ne fournit pas le coefficient de colinéarité entre les deux vecteurs (qu'il faudrait trouver si nécessaire).

Exemple 1 : avec les vecteurs $\vec{u}\ (6\,;-8)$ et $\vec{v}\ (-9\,;12)$

On calcule le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \end{vmatrix}$

on peut s'aider de ce petit outil visuel !

On obtient : $6 \times 12 \boxed{-} (-8) \times (-9) = 72 - 72 = 0$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

(et on pourrait montrer que $\vec{v} = -1{,}5\,\vec{u}$)

Exemple 2 : avec les vecteurs $\vec{u}\ (-5\,;4)$ et $\vec{v}\ (-7\,;6)$

On calcule le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

On obtient : $-5 \times 6 \boxed{-} 4 \times (-7) = -30 - (-28) = -2 \neq 0$

on peut entourer ce "moins" de la formule pour ne pas l'oublier !

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exemple 3 : avec les vecteurs $\vec{u}\ (9\,;-13{,}5)$ et $\vec{v}\ (-4\,;6)$

On calcule le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -13{,}5 & 6 \end{vmatrix}$

On obtient : $9 \times 6 \boxed{-} (-13{,}5) \times (-4) = 54 - 54 = 0$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

(et on pourrait montrer que $\vec{u} = -\frac{9}{4}\vec{v} = -2{,}25\,\vec{v}$)

Remarque : *les exemples sont les mêmes que la fiche précédente. Faites votre choix pour la méthode !!!*

Comment montrer que des droites sont parallèles

La ***colinéarité de deux vecteurs*** va nous permettre de conclure sur le ***parallélisme de deux droites***.
Pour cela, on prendra *deux points de chaque droite* et on étudie la *colinéarité* des vecteurs correspondants.

La propriété pour montrer le parallélisme de deux droites

Deux droites (PR) et (UV) sont ***parallèles***
si et seulement si
les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{UV}$ sont ***colinéaires***.

Exemple 1 : avec les points R (3 ; 4) , T (7 ; - 2) , M (2 ; 10) et N (8 ; 1).
Les droites (RT) et (MN) sont-elles parallèles ?

On a $\overrightarrow{RT} \left| \begin{array}{l} x_T - x_R = 7 - 3 = 4 \\ y_T - y_R = -2 - 4 = -6 \end{array} \right.$

On a $\overrightarrow{MN} \left| \begin{array}{l} x_N - x_M = 8 - 2 = 6 \\ y_N - y_M = 1 - 10 = -9 \end{array} \right.$

On calcule le déterminant des vecteurs $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -6 & -9 \end{vmatrix}$

on obtient $4 \times (-9) \boxed{-} (-6) \times 6 = -36 - (-36) = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

Donc les DROITES (RT) et (MN) sont PARALLÈLES.

Exemple 2 : avec les points A (1 ; 2) , B (3 ; 5) , E (4 ; 3) et H (10 ; 11).
Les droites (AB) et (EH) sont-elles parallèles ?

On a $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} x_B - x_A = 3 - 1 = 2 \\ y_B - y_A = 5 - 2 = 3 \end{array} \right.$

On a $\overrightarrow{EH} \left| \begin{array}{l} x_H - x_E = 10 - 4 = 6 \\ y_H - y_E = 11 - 3 = 8 \end{array} \right.$

On calcule le déterminant des vecteurs $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$

on obtient $2 \times 8 \boxed{-} 3 \times 6 = 16 - 18 = -2 \neq 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EH}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les DROITES (AB) et (EH) ne sont pas PARALLÈLES.

Comment montrer que des points sont alignés

La ***colinéarité de deux vecteurs*** va nous permettre de conclure sur l'***alignement de trois points***.
Pour cela, avec les trois points, on calculera les ***coordonnées de deux vecteurs*** (et, donc, un point se retrouvera dans les deux vecteurs) et on étudie la ***colinéarité*** de ces vecteurs.

La propriété pour montrer l'alignement de trois points

Les trois points R, T et M sont ***alignés***
si et seulement si
les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RM}$ sont ***colinéaires***.

Remarque : on aurait pu travailler avec les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ *et* $\overrightarrow{TM}$ *ou avec les vecteurs* $\overrightarrow{RM}$ *et* $\overrightarrow{TM}$ *(il faut juste qu'un point se retrouve dans les deux vecteurs !!).*

Exemple 1 : avec les points R (- 4 ; - 2) , T (4 ; 2) , M (8 ; 4).
Les points R , T et M sont-ils alignés ?

On a $\overrightarrow{RT} \left| \begin{array}{l} x_T - x_R = 4-(-4) = 8 \\ y_T - y_R = 2-(-2) = 4 \end{array} \right.$

On a $\overrightarrow{RM} \left| \begin{array}{l} x_M - x_R = 8-(-4) = 12 \\ y_M - y_R = 4-(-2) = 6 \end{array} \right.$

On calcule le déterminant des vecteurs $\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

On obtient $8 \times 6 \boxed{-} 4 \times 12 = 48 - 48 = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RM}$ sont colinéaires

Donc les POINTS R, T et M sont ALIGNÉS.

Exemple 2 : avec les points A (- 1 ; 2) , B (3 ; 4) , C (12 ; 8).
Les points A , B et C sont-ils alignés ?

On a $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} x_B - x_A = 3-(-1) = 4 \\ y_B - y_A = 4 - 2 = 2 \end{array} \right.$

On a $\overrightarrow{AC} \left| \begin{array}{l} x_C - x_A = 12-(-1) = 13 \\ y_C - y_A = 8 - 2 = 6 \end{array} \right.$

On calcule le déterminant des vecteurs $\begin{vmatrix} 4 & 13 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$

On obtient $4 \times 6 \boxed{-} 2 \times 13 = 24 - 26 = -2 \neq 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Comment montrer que des vecteurs sont colinéaires en travaillant sans coordonnées

Cette fiche va nous permettre de montrer que des vecteurs sont colinéaires même si on ne connait pas leurs coordonnées. Il faudra juste avoir des égalités vectorielles nous permettant de conclure.

Principe de base (avec un exemple détaillé)

On suppose que l'on connait deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à partir des égalités suivantes :
- on sait que $\vec{u} = 3\,\overrightarrow{AB} + 4\,\overrightarrow{AC}$
- on sait que $\vec{v} = 6\,\overrightarrow{AB} + 8\,\overrightarrow{AC}$

On constate que les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *s'expriment à partir des mêmes vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Cela doit nous amener à chercher un coefficient de proportionnalité entre les nombres.

Méthode 1 : on constate directement que $\vec{v} = 2\,\vec{u}$ car on a $2(3\,\overrightarrow{AB} + 4\,\overrightarrow{AC}) = 6\,\overrightarrow{AB} + 8\,\overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc ***colinéaires***.

Méthode 2 : plus globalement, on pourra diviser ensemble les coefficients de $\overrightarrow{AB}$ puis ceux de $\overrightarrow{AC}$.
Ici, on calcule donc $6 : 3 = 2$ et $8 : 4 = 2$. Les résultats sont bien égaux.
Donc les valeurs sont proportionnelles. Et donc les vecteurs sont ***colinéaires*** avec $\vec{v} = 2\,\vec{u}$.

Il faudra juste bien faire attention d'avoir des vecteurs (ici, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *) exprimés à partir des mêmes vecteurs (ici,* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$).

Application 1 : *attention de bien avoir des décompositions rangées dans le même ordre .*
On sait que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$ → on se souviendra que $\overrightarrow{AB} = 1\,\overrightarrow{AB}$
et $\vec{v} = 5\,\overrightarrow{AC} - 2{,}5\,\overrightarrow{AB}$ → on va écrire $\vec{v}$ en mettant $\overrightarrow{AB}$ en premier

on obtient $\vec{u} = 1\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
et $\vec{v} = -2{,}5\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$

on calcule donc $-2{,}5 : 1 = -2{,}5$ et $5 : (-2) = -2{,}5$
Les résultats sont bien égaux.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (avec $\vec{v} = -2{,}5\,\vec{u}$).

Application 2 : *il sera parfois nécessaire d'utiliser la relation de Chasles pour avoir les décompositions.*
On sait que $\vec{u} = 3\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$
et $\vec{v} = 2\,\overrightarrow{AB} - 4\,\overrightarrow{BC}$ → il va falloir décomposer $\overrightarrow{BC}$!
on sait que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

on a $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} - 4(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$
$= 2\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{AC}$
$= 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$

on a donc $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
et $\vec{v} = 6\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$

On voit que $\vec{v} = 2\vec{u}$ et donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$6 : 3 = 2$ et $-4 : (-2) = 2$