Comment montrer que des vecteurs sont colinéaires en travaillant sans coordonnées

Cette fiche va nous permettre de montrer que des vecteurs sont colinéaires même si on ne connait pas leurs coordonnées. Il faudra juste avoir des égalités vectorielles nous permettant de conclure.

Principe de base (avec un exemple détaillé)

On suppose que l'on connait deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à partir des égalités suivantes :
- on sait que $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$
- on sait que $\vec{v} = 6\overrightarrow{AB} + 8\overrightarrow{AC}$

On constate que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'expriment à partir des mêmes vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Cela doit nous amener à chercher un coefficient de proportionnalité entre les nombres.

Méthode 1 : on constate directement que $\vec{v} = 2\vec{u}$ car on a $2(3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}) = 6\overrightarrow{AB} + 8\overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc ***colinéaires***.

Méthode 2 : plus globalement, on pourra diviser ensemble les coefficients de $\overrightarrow{AB}$ puis ceux de $\overrightarrow{AC}$.
Ici, on calcule donc $6 : 3 = 2$ et $8 : 4 = 2$. Les résultats sont bien égaux.
Donc les valeurs sont proportionnelles. Et donc les vecteurs sont ***colinéaires*** avec $\vec{v} = 2\vec{u}$.

Il faudra juste bien faire attention d'avoir des vecteurs (ici, $\vec{u}$ et $\vec{v}$) exprimés à partir des mêmes vecteurs (ici, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$).

Application 1 : *attention de bien avoir des décompositions rangées dans le même ordre.*

On sait que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ → on se souviendra que $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB}$
et $\vec{v} = 5\overrightarrow{AC} - 2{,}5\overrightarrow{AB}$ → on va écrire $\vec{v}$ en mettant $\overrightarrow{AB}$ en premier

on obtient $\vec{u} = 1\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
et $\vec{v} = -2{,}5\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$

on calcule donc $-2{,}5 : 1 = -2{,}5$ et $5 : (-2) = -2{,}5$
Les résultats sont bien égaux.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (avec $\vec{v} = -2{,}5\vec{u}$).

Application 2 : *il sera parfois nécessaire d'utiliser la relation de Chasles pour avoir les décompositions.*

On sait que $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
et $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$ → il va falloir décomposer $\overrightarrow{BC}$!
on sait que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

on a $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} - 4(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$
$= 2\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{AC}$
$= 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$

on a donc $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
et $\vec{v} = 6\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$

On voit que $\vec{v} = 2\vec{u}$ et donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$6 : 3 = 2$ et $-4 : (-2) = 2$