Les variations d'une fonction

Etudier le ***sens de variation*** d'une fonction, c'est indiquer les intervalles sur lesquels elle est ***croissante*** et les intervalles sur lesquels elle est ***décroissante***. On résume les résultats dans un ***tableau de variations***.

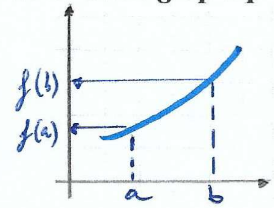
Définition d'une fonction croissante (sur un intervalle)

→ une fonction f est ***croissante*** sur un intervalle I si, pour tous nombres a et b de cet intervalle, la phrase mathématique suivante est vérifiée : ***si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$***.

→ on dit qu'il y a ***conservation de l'ordre*** : les images $f(a)$ et $f(b)$ sont dans le *même ordre* que a et b.

→ dans le language courant, on dira que ***"la courbe monte"***.

Une illustration graphique



on a : $a < b$

et $f(a) < f(b)$

Un exemple algébrique avec $f(x) = 4x - 2$

on considère : $a \boxed{<} b$

on obtient : $4a < 4b$

soit $4a - 2 < 4b - 2$

soit $f(a) \boxed{<} f(b)$

→ l'ordre est donc CONSERVÉ.

→ la fonction est donc CROISSANTE.

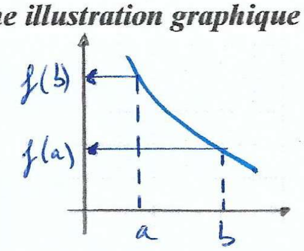
Définition d'une fonction décroissante (sur un intervalle)

→ une fonction f est ***décroissante*** sur un intervalle I si, pour tous nombres a et b de cet intervalle, la phrase mathématique suivante est vérifiée : ***si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$***.

→ on dit alors qu'il y a ***inversion de l'ordre*** : les images $f(a)$ et $f(b)$ sont dans l'*ordre inverse* de a et b.

→ dans le language courant, on dira que ***"la courbe descend"***.

Une illustration graphique



on a : $a < b$

mais $f(a) > f(b)$

Un exemple algébrique avec $f(x) = -3x + 5$

on considère : $a \boxed{<} b$

on obtient : $-3a > -3b$ multiplication par un négatif

soit $-3a + 5 > -3b + 5$

soit $f(a) \boxed{>} f(b)$

→ l'ordre a été INVERSÉ

→ la fonction est DÉCROISSANTE.

Un exemple de tableau de variations

x	1	3	4	8
Variations de $f(x)$	2 ↗	9 ↘	7 ↗	10

Il faudra faire attention de bien donner des intervalles qui concernent les valeurs de la lettre x !!

La fonction est CROISSANTE sur $[1;3]$ et sur $[4;8]$

c'est à dire sur $[1;3] \cup [4;8]$.

La fonction est DÉCROISSANTE sur $[3;4]$.

Comment obtenir les variations d'une fonction

En classe de Seconde, on va être amené à chercher les variations de fonctions relativement simples.
On s'intéressera alors à la ***conservation*** ou à l'***inversion*** de l'ordre entre des nombres a et b et leur images respectives $f(a)$ et $f(b)$ → on peut retenir que les ***inversions d'ordre*** vont être globalement liées au fait de ***multiplier par un nombre négatif*** et au fait de ***prendre des inverses***.

Je vous conseille de partir toujours de deux nombres a et b tels que $a < b$ et de vérifier, après opérations successives, si on se retrouve avec $f(a) < f(b)$ ou avec $f(a) > f(b)$.

Exemple 1 : on va montrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{x} + 3$ est ***décroissante*** sur $]0 ; +\infty[$.
(l'intervalle est choisi pour que le dénominateur ne s'annule pas : on est dans l'*ensemble de définition*).

on part de : $a \boxed{<} b$ (avec a et b dans $]0;+\infty[$)

→ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (on inverse l'ordre ici)

→ $\frac{2}{a} > \frac{2}{b}$ (on multiplie par 2 qui est positif)

→ $\frac{2}{a} + 3 > \frac{2}{b} + 3$ (on ajoute juste 3)

soit $f(a) \boxed{>} f(b)$

On constate qu'il y a eu une INVERSION de l'ordre.

Donc la fonction f est DÉCROISSANTE sur $]0;+\infty[$.

Exemple 2 : on va montrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{-4}{2x-6}$ est ***croissante*** sur $]3 ; +\infty[$
(l'intervalle est choisi pour que le dénominateur ne s'annule pas : on est dans l'*ensemble de définition*).

on part de : $a \boxed{<} b$ (avec a et b dans $]3;+\infty[$)

→ $2a < 2b$

→ $2a-6 < 2b-6$

première inversion, en prenant l'inverse.

→ $\frac{1}{2a-6} > \frac{1}{2b-6}$

deuxième inversion, on multiplie par -4 qui est négatif.

→ $\frac{-4}{2a-6} < \frac{-4}{2b-6}$

soit $f(a) \boxed{<} f(b)$

On constate qu'il y a CONSERVATION de l'ordre.

Donc la fonction f est CROISSANTE sur $]3;+\infty[$.

Comment trouver le minimum ou le maximum d'une fonction

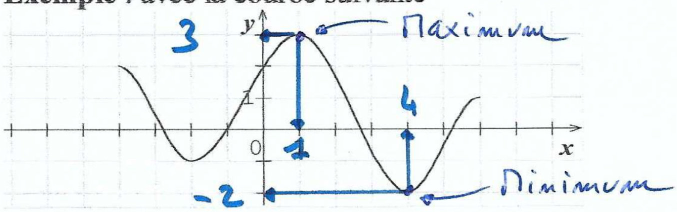
On va s'intéresser ici aux *extremums* d'une fonction , c'est à dire son ***minimum*** ou son ***maximum***.
Le ***minimum*** d'une fonction, c'est la plus petite valeur prise par les images $f(x)$ de cette fonction.
Le ***maximum*** d'une fonction, c'est la plus grande valeur prise par les images $f(x)$ de cette fonction.

Trouver des extremums à l'aide d'une courbe

Pour un ***maximum***, on regarde quel est le point "*le plus haut*", et donc l'ordonnée la plus grande.
Et pour un ***minimum***, c'est le point "*le plus bas*" , avec l'ordonnée la plus petite.
On fera alors des phrases du type : "*Le maximum est égal à .... et il est atteint en .....*" .

on écrit l'ordonnée ici — on écrit l'abscisse correspondante

Exemple : avec la courbe suivante



Le maximum est ici égal à 3, et il est atteint en 1.
Le minimum est ici égal à -2, et il est atteint en 4.

Trouver des extremums à l'aide d'un tableau de variations

On donne le tableau suivant et on cherche quelles sont la plus grande et la plus petite valeurs prises par f.

x	2	5	7	10	12	16
Variations de $f(x)$	1	4	3	6 Maximum	0 Minimum	2

Le maximum est ici égal à 6, et il est atteint en 10.
Le minimum est ici égal à 0, et il est atteint en 12.

Trouver des extremums à l'aide d'une expression algébrique

En classe de Seconde, il y aura peu de fonctions pour lesquelles l'expression algébrique nous permettra de déterminer des extremums. Ce sera surtout le cas pour les expressions appelées *forme canonique*.
Exemple : avec la fonction définie par $f(x) = 3(x-2)^2 + 4$

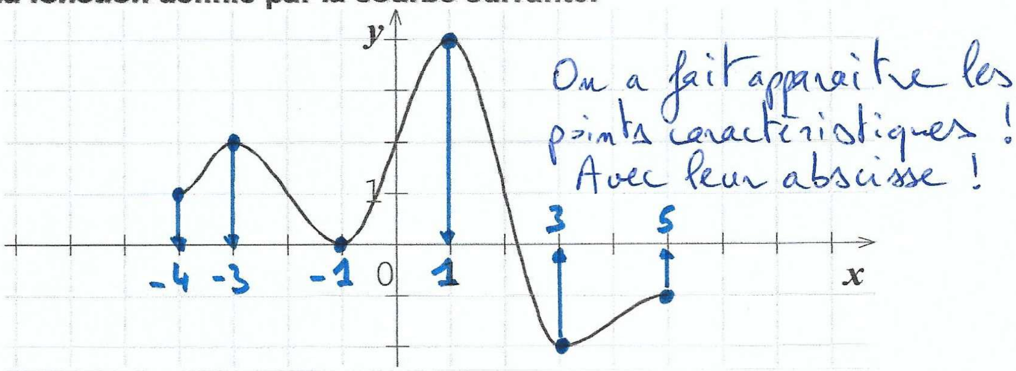
On a : $f(2) = 3 \times (2-2)^2 + 4 = 3 \times 0 + 4 = 4$
et pour tout $x \neq 2$, on a : $(x-2)^2 > 0$
soit $3(x-2)^2 > 0$
soit $\underbrace{3(x-2)^2 + 4}_{f(x)} > 4$

Donc on a $f(2) = 4$ et $f(x)$ qui est toujours supérieur à 4.
→ 4 est le minimum de f et ce minimum est atteint en 2.

Comment on passe d'une courbe à un tableau de variations

Je vous conseille de bien suivre, *avec méthode*, la démarche expliquée dans cette fiche. Cela évitera les trop nombreuses erreurs et confusions (qui sont vues en classe) entre les abscisses et les ordonnées.

On considère la fonction définie par la courbe suivante.



Etape 1 : on commence par les variations, c'est à dire par les "flèches" .
On commence en regardant bien la courbe, pour voir où elle est croissante et où elle est décroissante.

x					
Variations de f (x)	↗	↘	↗	↘	↗

Etape 2 : on place ensuite les abscisses sur la première ligne du tableau.
Il faut se forcer, dans cette étape, à ne regarder que la ligne des *abscisses*.
On donne celles qui correspondent aux points qui amènent des changements de variations.

x	-4		-3		-1		1		3		5
Variations de f (x)		↗		↘		↗		↘		↗	

Etape 3 : on finit le tableau en plaçant les ordonnées aux extrêmités des "flèches".
Cette fois, on ne doit regarder que les ordonnées, afin de donner celles qui correspondent aux points déjà indiqué dans le tableau. On peut alors *mentalement* utiliser des phrases du type : *"la fonction monte de ...... à ...."* ou *"la fonction descend de ...... à ...... "*

x	-4		-3		-1		1		3		5
Variations de f (x)	1	↗	2	↘	0	↗	4	↘	-2	↗	-1

Remarque
Le ***maximum*** de la fonction est ici égal à 4 , et il est atteint en 1.
Le ***minimum*** est, quant à lui, égal à – 2 , et il est atteint en 3.

Comment comparer des images à l'aide des variations
Savoir donner un encadrement de $f(x)$

On va utiliser le fait qu'une fonction *croissante* va ***conserver*** l'ordre (et qu'une fonction *décroissante* va l'***inverser***). L'idée ici va être, même sans connaitre l'expression algébrique d'une fonction et sans aucun calcul, de pouvoir classer les images de deux nombres à partir des variations de cette fonction.

On considère le tableau de variations suivant

x	1	3	4	6	7	8	10
Variations de $f(x)$	12	$f(3)$	$f(4)$	17	$f(7)$	$f(8)$	13

On cherche à comparer $f(3)$ et $f(4)$

Je vous propose la rédaction suivante afin de bien répondre à cette question.

Les nombres 3 et 4 appartiennent à l'intervalle $[1 ; 6]$
sur lequel la fonction est CROISSANTE.
Il y a donc CONSERVATION de l'ordre.
On a : $3 < 4$
et donc $f(3) < f(4)$.

On cherche à comparer $f(7)$ et $f(8)$

Attention, le raisonnement se fait cette fois sur un intervalle sur lequel la fonction est décroissante.

Les nombres 7 et 8 appartiennent à l'intervalle $[6 ; 10]$
sur lequel la fonction est DÉCROISSANTE.
Il y a donc INVERSION de l'ordre
On a : $7 < 8$ inversion de l'ordre
et donc $f(7) > f(8)$

On cherche à comparer $f(4)$ et $f(7)$

C'est un piège !! On ne peut pas comparer $f(4)$ et $f(7)$ sans plus d'informations sur la fonction. Les nombres 4 et 7 se trouvent sur des intervalles "séparés" et on ne peut pas appliquer le travail précédent.

On va maintenant donner un encadrement de $f(x)$

Le minimum de f est 12, et le maximum est 17.
On a : $1 \leq x \leq 10$ (x compris entre 1 et 10)
et $12 \leq f(x) \leq 17$ ($f(x)$ compris entre 12 et 17)