Comment obtenir les variations d'une fonction : les exercices

Le but de ces exercices est tout simplement de vous entrainer à manipuler les inégalités afin de pouvoir conclure si une fonction donnée est croissante ou décroissante sur tel ou tel intervalle.

Exercice 1

Démontrer que la fonction définie par $f(x) = 5x - 3$ est ***croissante*** sur $]-\infty\,;+\infty[$.

On pourra, à terme, utiliser un résultat de cours sur les fonctions affines qui nous indique que le coefficient 5 de la fonction affine étant positif , la fonction f est bien croissante.

Exercice 2

Démontrer que la fonction définie par $f(x) = -4x + 2$ est ***décroissante*** sur $]-\infty\,;+\infty[$.

On pourra, à terme, utiliser un résultat de cours sur les fonctions affines qui nous indique que le coefficient - 4 de la fonction affine étant négatif , la fonction f est bien décroissante.

Exercice 3

Déterminer les variations de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4x+8}$

Il faudra faire attention au domaine de définition car la quantité à l'intérieur de la racine carrée doit être impérativement positive.

Exercice 4

Déterminer les variations de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{-2x-10}$

Il faudra, à nouveau, faire attention au domaine de définition car la quantité à l'intérieur de la racine carrée doit être impérativement positive.

Exercice 5

Déterminer les variations de la fonction définie par $f(x) = -7x^2 - 1$

Il faudra se méfier de la fonction carrée qui inverse l'ordre pour les nombres négatifs !!

Exercice 6

Montrer que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-5}{-2x-1}$ est ***décroissante*** sur $\left]\dfrac{-1}{2}\,;+\infty\right[$

On a ici un exercice très proche des exemples traités dans la fiche de cours.

Exercice 7

Montrer que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-6}{x} - 1$ est ***croissante*** sur $]0\,;+\infty[$

On a, à nouveau, un exercice très proche des exemples traités dans la fiche de cours.

→ *voici les réponses !!*

Exercice 1

On considère $f(x) = 5x - 3$ sur $]-\infty ; +\infty[$.

on part de $a \boxed{<} b$ (avec a et b dans $]-\infty ; +\infty[$)

→ on obtient $5a < 5b$

puis $5a - 3 < 5b - 3$

soit $f(a) \boxed{<} f(b)$

→ pas d'inversion de l'ordre, la fonction est croissante.

(sur $]-\infty ; +\infty[$)

Exercice 2

On considère $f(x) = -4x + 2$ sur $]-\infty ; +\infty[$.

on part de $a \boxed{<} b$ (avec a et b dans $]-\infty ; +\infty[$)

→ on obtient $-4a > -4b$ inversion de l'ordre, on a multiplié par -4 qui est négatif.

puis $-4a + 2 > -4b + 2$

soit $f(a) \boxed{>} f(b)$

→ il y a inversion de l'ordre, la fonction est décroissante.

(sur $]-\infty ; +\infty[$)

Exercice 3

On considère $f(x) = \sqrt{4x+8}$

* on commence par le domaine de définition

→ on veut $4x + 8 \geq 0$ soit $x \geq -\frac{8}{4}$ → $x \geq -2$

* on part de $a \boxed{<} b$ (avec a et b dans $[-2 ; +\infty[$)

↘ soit $x \geq -2$

→ on obtient $4a < 4b$

puis $4a + 8 < 4b + 8$

puis $\sqrt{4a+8} < \sqrt{4b+8}$

soit $f(a) \boxed{<} f(b)$

→ il y a conservation de l'ordre,

la fonction est croissante sur $[-2 ; +\infty[$.

Exercice 4

On considère $f(x) = \sqrt{-2x-10}$

* on commence par le domaine de définition

→ on veut $-2x-10 \geq 0$ soit $x \geq -\frac{10}{2}$ → $x \geq -5$

* on part de $a \boxed{<} b$ (avec a et b dans $[-5;+\infty[$)

→ soit $x \geq -5$

→ on obtient $-2a > -2b$

inversion de l'ordre, on a multiplié par -2, qui est négatif.

puis $-2a-10 > -2b-10$

puis $\sqrt{-2a-10} > \sqrt{-2b-10}$

soit $f(a) \boxed{>} f(b)$

→ il y a inversion de l'ordre, la fonction est décroissante sur $[-5;+\infty[$.

Exercice 5

On considère $f(x) = -7x^2 - 1$ → attention ! à cause de la fonction carrée, on doit travailler sur $]-\infty;0]$ puis $[0;+\infty[$.

* on part de $a \boxed{<} b$ (avec a et b dans $]-\infty;0]$)

→ on obtient $a^2 > b^2$ (inversion pour les négatifs !)

puis $-7a^2 < -7b^2$ (multiplication par un négatif !!)

puis $-7a^2-1 < -7b^2-1$

soit $f(a) \boxed{<} f(b)$

→ conservation de l'ordre, fonction croissante sur $]-\infty;0]$.

* on part de $a \boxed{<} b$ (avec a et b dans $[0;+\infty[$)

→ on obtient $a^2 < b^2$

puis $-7a^2 > -7b^2$ (multiplication par un négatif)

puis $-7a^2-1 > -7b^2-1$

soit $f(a) \boxed{>} f(b)$

→ inversion de l'ordre, fonction décroissante sur $[0;+\infty[$.

Exercice 6

On considère $f(x) = \frac{-5}{-2x-1}$ sur l'intervalle $]\frac{-1}{2};+\infty[$.

c'est la valeur interdite

on part de : $a \boxed{<} b$ (avec a et b dans $]-\frac{1}{2};+\infty[$)

→ on obtient $-2a > -2b$ première inversion : on multiplie par un négatif.

puis $-2a-1 > -2b-1$

puis $\frac{1}{-2a-1} < \frac{1}{-2b-1}$ deuxième inversion : on prend l'inverse.

puis $\frac{-5}{-2a-1} > \frac{-5}{-2b-1}$ troisième inversion : on multiplie par un négatif

soit $f(a) \boxed{>} f(b)$

→ il y a inversion de l'ordre,
la fonction est décroissante sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$.

Exercice 7

On considère $f(x) = \frac{-6}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c'est la valeur interdite

on part de : $a \boxed{<} b$ (avec a et b dans $]0;+\infty[$)

→ on obtient : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ première inversion : on prend l'inverse.

puis $-\frac{6}{a} < -\frac{6}{b}$ deuxième inversion : on multiplie par un négatif

puis $-\frac{6}{a}-1 < -\frac{6}{b}-1$

soit $f(a) \boxed{<} f(b)$

→ il y a conservation de l'ordre,
la fonction est croissante sur $]0;+\infty[$.