Corrigé de l'épreuve de mathématiques

du Bac Spécialité Maths

Polynésie juin 2021 (pour candidats libres)

Sujet 2

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

1. on a $U_1 = 0,95 \times U_0 + 200 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = \boxed{9700}$

et $U_2 = 0,95 \times U_1 + 200 = 0,95 \times 9700 + 200 = \boxed{9415}$

2. ⓐ c'est une récurrence très basique !

Init : on a $U_0 = 10\,000 > 4\,000 \rightarrow \boxed{OK}$

Hérédité : on suppose $U_n > 4000$

$\rightarrow 0,95 U_n > 3800$ — $0,95 \times 4000$

$\rightarrow 0,95 U_n + 200 > 4000$ — $3800 + 200$

soit $U_{n+1} > 4000$

ⓑ On suppose que la suite est décroissante.
Or elle est minorée par 4000 → elle est donc convergente.

3. ⓐ on a $V_0 = U_0 - 4000 = 10\,000 - 4000 = \boxed{6000}$

ⓑ on a $V_n = U_n - 4000 \rightarrow U_n = V_n + 4000$

→ on part de $V_{n+1} = U_{n+1} - 4000$

$= 0,95 U_n + \underbrace{200 - 4000}$

$= 0,95 (V_n + 4000) - 3800$

$= 0,95 V_n + \underbrace{0,95 \times 4000 - 3800}_{0}$

soit $V_{n+1} = 0,95 V_n$

→ (V_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $V_0 = 6000$

ⓒ on a donc $V_n = V_0 \times q^{(n-0)} = 6000 \times 0,95^n$

et donc $U_n = V_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000$

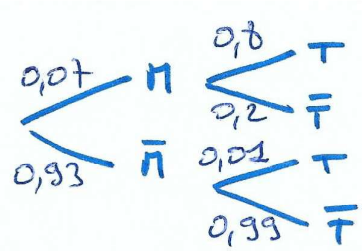
ⓓ on a $-1 < 0,95 < 1 \rightarrow \lim_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$

$\rightarrow \lim_{n \to +\infty} 6000 \times 0,95^n = 0 \rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = 4\,000$

4. La situation correspond exactement à (U_n)
→ à terme $(n \to +\infty)$, la population tend vers 4000
Donc il disparaitrait globalement 6000 individus
soit plus de la moitié de la population.

Exercice 2

1. on a



2. ⓐ on cherche $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0{,}07 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}056}$

ⓑ on cherche $p(T)$ → formule des probabilités totales

$$p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \overline{M})$$
$$= 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}01 = \boxed{0{,}0653}$$

3. on cherche $p_T(M) = \dfrac{p(T \cap M)}{p(T)} = \dfrac{0{,}056}{0{,}0653} \approx 0{,}86$ (86%)

4. ⓐ c'est une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ avec $n = 10$ et $p = p(T) = 0{,}0653$ (pas de justification demandée !)

ⓑ on calcule $p(X=2) \approx 0{,}11$ avec binomFdp.

5. on travaille avec n inconnue et $p = 0{,}0653$

et on veut $p(X \geq 1) \geq 0{,}99$

or on a $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

$$= 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \times \underbrace{0{,}0653^0}_{1} \times (1-0{,}0653)^{n-0}$$

on obtient l'inéquation :

$$1 - 0{,}9347^n \geq 0{,}99$$

soit $0{,}9347^n \leq 0{,}01$

soit $\ln 0{,}9347^n \leq \ln 0{,}01$

soit $n \times \ln 0{,}9347 \leq \ln 0{,}01$

soit $n \geq \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9347}$ (on inverse le sens de l'inégalité car $\ln 0{,}9347$ est négatif)

↳ $\approx 68{,}19$

↳ il faut donc un minimum de 69 personnes pour avoir la condition souhaitée.

Exercice 3

1. on a $B\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$ $D\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}$ $E\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$ $G\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$ $H\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}$

2. ⓐ on a $EG = GD = ED$ car ce sont des diagonales de carré de mêmes dimensions → EGD est équilatéral.

ⓑ La diagonale d'un carré de côté 1 est égale à $\sqrt{2}$ (on retrouve ce résultat en appliquant le théo. de pythagore)

Donc on a : Aire EGD $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. on cherche les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de M en sachant que l'on a $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$

soit $\begin{cases} x-1 = \frac{1}{3}(0-1) \\ y-0 = \frac{1}{3}(1-0) \\ z-0 = \frac{1}{3}(1-0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}+1 = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow M\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$

4. ⓐ on vérifie que $\vec{n}$ est $\perp$ à 2 vecteurs du plan (EGD)
→ on utilise le produit scalaire.

on a : $\vec{n}.\overrightarrow{EG} = \begin{vmatrix}-1\\1\\1\end{vmatrix} . \begin{vmatrix}1-0\\1-0\\1-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1\\1\\1\end{vmatrix} . \begin{vmatrix}1\\1\\0\end{vmatrix} = -1\times1+1\times1+1\times0 = \boxed{0}$

et $\vec{n}.\overrightarrow{GD} = \begin{vmatrix}-1\\1\\1\end{vmatrix} . \begin{vmatrix}0-1\\1-1\\0-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1\\1\\1\end{vmatrix} . \begin{vmatrix}-1\\0\\-1\end{vmatrix} = -1\times(-1)+1\times0+1\times(-1) = \boxed{0}$

Donc on a bien $\vec{n} \perp \overrightarrow{EG}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{GD}$ soit $\vec{n} \perp (EGD)$.

ⓑ Les coordonnées de $\vec{n}$ vont donc remplacer les nombres a, b et c de l'équation $ax+by+cz+d=0$

→ on obtient $-1\times x + 1\times y + 1\times z + d = 0$

soit $-x+y+z+d=0$

or $E \in (EGD)$ donc le point E "vérifie" cette équation

$\rightarrow \underbrace{-0}_{x_E} + \underbrace{0}_{y_E} + \underbrace{1}_{z_E} + d = 0 \rightarrow d = -1$

on obtient donc bien : $-x+y+z-1=0$

ⓒ $\vec{n}$ est donc un vecteur directeur de D
et M est un point de D.

on obtient : $\begin{cases} x = \boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{(-1)}\,k \\ y = \frac{1}{3} + 1\,k \\ z = \frac{1}{3} + 1\,k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} - k \\ y = \frac{1}{3} + k \\ z = \frac{1}{3} + k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

point M vecteur $\vec{n}$

5. ⓐ K représente l'intersection de la droite D et du plan (GED)

on résout donc : $-\left(\frac{2}{3}-k\right)+\left(\frac{1}{3}+k\right)+\left(\frac{1}{3}+k\right)-1=0$

soit $3k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{3}$

on obtient donc : $K \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$

ⓑ. on peut prendre le triangle GED comme base et sa hauteur associée sera MK.

on a : Aire $GED = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (question 2 !)

et $MK = \sqrt{(x_K - x_M)^2 + (y_K - y_M)^2 + (z_K - z_M)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\frac{1}{\sqrt{3}}$

On en déduit : Volume $GEDM = \frac{1}{3} \times \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{Aire } GED} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\text{Hauteur } MK} = \boxed{\frac{1}{6}}$

Exercice au choix → exercice A

Partie 1

1. on a $f(0) = 2$ → c'est l'image de 0 par f

et $f'(0) = -1$ → coefficient directeur de la tangente en 0

2. fonction convexe → courbe en "smiley" → $[0 ; +\infty[$

Partie 2

1. pour $y' = -y$, le cours nous donne $y = Ae^{-x}$ avec $A \in \mathbb{R}$

(équation du type $y' = ay$, avec $a = -1$)

2. on obtient $\underbrace{g(x)}_{\text{solution particulière de (E)}} + \underbrace{Ae^{-x}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$ (avec $A \in \mathbb{R}$)

3. on veut $f(0) = 2$ → $g(0) + Ae^{-0} = 2$

→ $0 \times e^{-0} + Ae^{-0} = 2$ → $A = 2$ $(e^{-0} = 1)$

→ on obtient $f(x) = \underbrace{xe^{-x}}_{g(x)} + 2e^{-x} = (x+2)e^{-x}$

Partie 3

1. a) on calcule $f'(x)$ en utilisant $(uv)' = u'v + uv'$

→ $f'(x) = 1e^{-x} + (x+2)(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x - 2)$

→ $f'(x) = e^{-x}(-x-1)$

b) on a $e^{-x} > 0$ donc le signe de f' dépend de $-x-1$!

on obtient :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	e	↘	

on résout :
$-x - 1 = 0$
→ $x = -1$

$f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = 1e^{1} = e$

2. a) on calcule $f''(x)$ en partant de $f'(x)$

→ on utilise $(uv)' = u'v + uv'$ → $-1e^{-x} + (-x-1)(-e^{-x})$

→ $f''(x) = -e^{-x}(1 - x - 1) = -e^{-x}(-x) = xe^{-x}$

b) sur $[0 ; +\infty[$, on a $x \geq 0$ et $e^{-x} > 0$ → $f''(x) \geq 0$

Donc f est bien convexe sur $[0 ; +\infty[$.

Exercice au choix → exercice B

Partie 1

1. a) on a $f(x) = -30x + 50 + 35 \ln x$

$\rightarrow f'(x) = -30 + 0 + 35 \times \frac{1}{x} = -30 + \frac{35}{x} = \frac{-30x+35}{x}$

b) sur $[1;4]$, le dénominateur x est donc positif

et on résout $-30x + 35 = 0 \rightarrow x = \frac{35}{30} = \frac{7}{6} \in [1;4]$.

on obtient :

x	1		$7/6$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	20	↗	$f(\frac{7}{6}) \approx 20{,}4$	↘	$f(4) \approx -21{,}5$

avec $f(1)$
$= -30 \times 1 + 50 + 35 \underbrace{\ln 1}_{0}$
$= -30 + 50 = 20$

2. sur $[1;\frac{7}{6}]$, il n'y a pas de solution pour $f(x) = 0$
car le minimum sur cet intervalle est égal à 20

sur $[\frac{7}{6};4]$, on reconnait l'utilisation du TVI.

→ f est continue et décroissante sur $[\frac{7}{6};4]$

avec $f(\frac{7}{6}) \approx 20{,}4$ et $f(4) \approx -21{,}5$

Donc $0 \in$ à l'intervalle image $[f(4); f(\frac{7}{6})]$

et d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$
possède une unique solution sur $[\frac{7}{6};4]$.

→ avec la calculatrice et le tableau de valeurs,
on obtient : $2{,}914 < \alpha < 2{,}915$

3. en liant cela au tableau de variations, on en
déduit le signe de f

→

x	1		α		4
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Partie 2

1. pour 2500, on remplace x par 2,5

$\rightarrow B(2{,}5) \simeq 23{,}925$ (milliers d'euros) $\rightarrow$ 23925 €

2. on a : $B(x) = -15x^2 + 15x + \underbrace{35\,x \ln x}_{\text{on utilise ici } (uv)' = u'v + uv'}$

$$\rightarrow B'(x) = -15 \times 2x + 15 + 35\left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right)$$
$$= -30x + 15 + 35 \ln x + 35$$
$$= -30x + 50 + 35 \ln x = f(x) \text{ !!}$$

3. ⓐ on connait le signe de f donc le signe de B' d'après la fin de la partie A.

x	1		α		4
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ⓑ le bénéfice maximal sera obtenu pour la valeur α

(avec $\alpha \simeq 2{,}914$)

$\rightarrow$ il faudra vendre environ 2,914 milliers de litre

soit environ 2914 l pour avoir un bénéfice maximal.