Corrigé de l'épreuve de mathématiques

du Bac Spécialité Maths

Centres étrangers juin 2021 (pour candidats libres)

Sujet 1

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 → les bonnes réponses à ce QCM sont :

1. $\boxed{b}$ 2. $\boxed{c}$ 3. $\boxed{b}$ 4. $\boxed{b}$ 5. $\boxed{b}$

Voici quelques explications (même si elles ne sont pas demandées)

Question 1 : on utilise deux fois la formule $(uv)' = u'v + uv'$

et on a $(e^{-2x}) = -2e^{-2x}$ ne pas oublier

on a $f'(x) = 1e^{-2x} + x\times(-2)e^{-2x} = e^{-2x}(1-2x)$

et $f''(x) = -2e^{-2x}(1-2x) + e^{-2x}\times(-2)$

$= e^{-2x}(-2(1-2x)-2) = e^{-2x}(4x-4)$

$= 4(x-1)e^{-2x}$ → réponse $\boxed{b}$

Question 2 : on veut calculer la combinaison $\binom{12}{3}$

→ on utilise directement la calculatrice

ou on calcule $\binom{12}{3} = \dfrac{12!}{9!3!} = \dfrac{12\times 11\times 10}{3\times 2} = 220$

→ réponse $\boxed{c}$

Question 3 : la question est très facile car la fonction f' est négative sur $[0;2]$

et donc f doit être décroissante sur $[0;2]$

et donc seul le tableau de la réponse $\boxed{b}$ convient.

Question 4 : c'est la question plutôt compliquée et technique de ce QCM.

→ il va falloir utiliser quelques formules et propriétés importantes des probabilités.

on veut calculer $p(A \cap B)$.

or on connait $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \underline{0,954}$

et on a $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$

avec $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$

soit $p(A \cap B) - p(A) - p(B) = -p(A \cup B)$

on remplace donc $-p(A \cup B)$ et on obtient :

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 + p(A \cap B) - p(A) - p(B)$$

soit $p(A \cap B) = p(\bar{A} \cap \bar{B}) + p(A) + p(B) - 1$

$= 0,954 + 0,028 + 0,022 - 1$

$= 0,004 \longrightarrow$ réponse b

<u>Question</u> 5 : $\rightarrow$ très, très facile !!

La fonction f est croissante sur $]-\infty ; -1]$

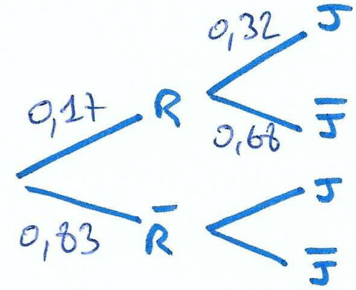
$\rightarrow$ on a alors f' positive sur $]-\infty ; -1]$

$\longrightarrow$ réponse $\boxed{b}$

Exercice 2

Partie A

1. on a l'arbre suivant



2. on a $p(R \cap J) = p(R) \times p_R(J) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544$

3. on a $P(J) = 0,11$ et on cherche $p(\overline{R} \cap J)$.
or, avec la formule des probabilités totales, on a :

$$P(J) = P(R \cap J) + p(\overline{R} \cap J)$$

soit $p(\overline{R} \cap J) = p(J) - p(R \cap J)$

$$= 0,11 - 0,0544 = 0,0556$$
$$\approx 0,056$$

4. on cherche $P_{\overline{R}}(J) = \dfrac{P(\overline{R} \cap J)}{p(\overline{R})} = \dfrac{0,0556}{0,83} \approx 0,067$ (6,7%)

Partie B

1. on a une loi binomiale $B(n; p)$ avec $n = 50$, $p = p(R) = 0,17$
(tirage avec remise → indépendance des épreuves qui vont se passer dans les mêmes conditions, avec deux issues possibles R et $\overline{R}$)

2. on calcule $p(X = 5) \approx 0,069$ avec binomFdp
→ il y a environ 6,9% de chances d'obtenir exactement 5 personnes utilisant les transports sur 50 interrogées.

3. on cherche $p(X < 13)$
→ on utilise binomFRep avec $p(X \leq 12)$
on obtient environ 0,929 ($< 0,95$) → c'est faux !

4. on calcule l'espérance $E(X) = n \times p$
→ $E(X) = 50 \times 0,17 = 8,5$ personnes (en moyenne).

Exercice 3

Partie A

1. on part de $a_0 = 200$ → 85% vont continuer soit $0,85 \times 200 = 170$

→ et vont s'ajouter 450 collaborateurs → $a_1 = 170 + 450 = \boxed{620}$

2. on aura bien sûr $a_{n+1} = \underbrace{0,85a_n}_{\text{85% du mois d'avant continue}} + \underbrace{450}_{\text{il y a chaque mois un ajout de 450}}$

3. ⓐ on a $V_n = a_n - 3000$ → $a_n = V_n + 3000$

→ on part de $V_{n+1} = a_{n+1} - 3000$

$= 0,85a_n + 450 - 3000$

$= 0,85(V_n + 3000) - 2550$

$= 0,85\,V_n + \underbrace{0,85 \times 3000 - 2550}_{0}$

soit $V_{n+1} = 0,85\,V_n$

→ (V_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $V_0 = a_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$

ⓑ on a donc $V_n = V_0 \times q^{(n-0)} = -2800 \times 0,85^n$

ⓒ on a $a_n = V_n + 3000 = -2800 \times 0,85^n + 3000$

4. on veut trouver n tel que $a_n > 2500$

Méthode 1 : on utilise le tableau de valeurs de la calculatrice et on trouve $n = 11$ car $a_{10} \approx 2448,8$ et $a_{11} \approx 2531,4$ (> 2500)

Méthode 2 : on résout $a_n > 2500$

soit $-2800 \times 0,85^n + 3000 > 2500$

soit $-2800 \times 0,85^n > -500$

soit $0,85^n < \frac{500}{2800}$

soit $\ln 0,85^n < \ln \frac{500}{2800}$

soit $n \times \ln 0,85 < \ln \frac{500}{2800}$

on inverse le sens de l'inégalité car ln 0,85 est négatif

→ $n > \dfrac{\ln \frac{500}{2800}}{\ln 0,85} \approx 10,6$ → à partir de $n = 11$

Partie B

1. on calcule $f'(x)$ avec la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\rightarrow$ on a $f'(x) = \dfrac{5(x+2) - (5x+4)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2} > 0$

sur $[0;+\infty[$, on a $f'(x) > 0 \rightarrow f$ est donc croissante.

2 a) on calcule $U_1 = \dfrac{5\times U_0 + 4}{U_0+2} = \dfrac{5\times 1 + 4}{1+2} = 3$

<u>Init</u> : on a bien $0 \leq \underset{1}{U_0} \leq \underset{3}{U_1} \leq 4 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$

<u>Hérédité</u> : on suppose $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 4$

or f est croissante et donc elle conserve l'ordre

on obtient $f(0) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(4)$

soit $(0 \leq)\ 2 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 4 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$

b) (U_n) est une suite croissante ($U_n \leq U_{n+1}$)

et majorée ($U_n \leq 4$) $\rightarrow$ elle est convergente.

3. on a $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Puisque $0 \leq 4 - U_n \leq 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$, on applique ici le théorème des gendarmes et on obtient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} (4 - U_n) = 0$

soit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 4$

Donc, il y aura, à terme, 4 (milliers) de satisfaits soit 4000 collaborateurs.

Exercice au choix → exercice A

1. on peut utiliser la réciproque de la propriété de Pythagore ou le produit scalaire en montrant $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ soit $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

→ on a $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} 3-2=1 \\ -1-(-1)=0 \\ 2-0=2 \end{array} \right.$ et $\overrightarrow{AC} \left| \begin{array}{l} 0-2=-2 \\ 4-(-1)=5 \\ 1-0=1 \end{array} \right.$

soit $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right. . \overrightarrow{AC} \left| \begin{array}{l} -2 \\ 5 \\ 1 \end{array} \right. = 1\times(-2) + 0\times 5 + 2\times 1 = 0 \rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

2. a) on doit montrer que $\vec{n}$ est $\perp$ à 2 vecteurs de (ABC)

→ $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right. . \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right. = 2\times 1 + 1\times 0 + (-1)\times 2 = 0 \rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$

et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right. . \left| \begin{array}{l} -2 \\ 5 \\ 1 \end{array} \right. = 2\times(-2) + 1\times 5 + (-1)\times 1 = 0 \rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

b) Les coordonnées de $\vec{n}$ vont remplacer les nombres a, b et c de l'équation du plan → $2x + 1y + (-1)z + d = 0$

or $A \in (ABC)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation

soit $2\times 2 + 1\times(-1) - 1\times 0 + d = 0 \rightarrow d = -3$

→ on obtient donc $2x + y - z - 3 = 0$

c) A, B et C sont sur un même plan (ABC)

or $S \notin (ABC)$ car $2\times \underset{\nwarrow x_S}{0} + \underset{\nwarrow y_S}{1} - \underset{\nwarrow z_S}{4} - 3 = -6 \neq 0$

Donc les quatre points ne sont pas coplanaires.

3. a) on a (d) $\left\{ \begin{array}{l} x = \boxed{0} + \boxed{2}\times k \\ y = \boxed{1} + \boxed{1}\times k \\ z = \boxed{4} + \boxed{(-1)}\times k \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k \\ y = 1 + k \\ z = 4 - k \end{array} \right.$ avec $k \in \mathbb{R}$

(d) passe par le point S

(d) $\perp$ (ABC) donc (d) est dirigée par $\vec{n}$

b) H est le point d'intersection de (d) avec (ABC)

→ on résout $2(2k) + (1+k) - (4-k) - 3 = 0$

soit $6k = 6 \rightarrow k = 1$

→ on obtient donc bien $(2\times 1 ; 1+1 ; 4-1) \rightarrow (2 ; 2 ; 3)$

4. on prend ABC comme base → c'est un triangle rectangle

→ $\text{Aire}_{ABC} = \dfrac{AB \times AC}{2}$ avec $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$= \sqrt{(3-2)^2 + (-1-(-1))^2 + (2-0)^2}$

$= \sqrt{5}$

et, de même, on obtient $AC = \sqrt{30}$

→ la hauteur est alors $SH = \sqrt{(x_H - x_S)^2 + (y_H - y_S)^2 + (z_H - z_S)^2}$

$= \sqrt{(2-0)^2 + (2-1)^2 + (3-4)^2}$

$= \sqrt{6}$

on obtient $V = \dfrac{\overbrace{\dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{30}}{2}}^{\text{base}} \times \overbrace{\sqrt{6}}^{\text{Hauteur}}}{3} = 5$ soit $V = 5$ u.v.

5. a) on a $SA = \sqrt{(x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2 + (z_A - z_S)^2}$

$= \sqrt{(2-0)^2 + (-1-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{24}$

b) on sait que $\vec{SA} \cdot \vec{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB})$

avec $\vec{SA} \cdot \vec{SB} = \begin{vmatrix} 2-0 \\ -1-1 \\ 0-4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-0 \\ -1-1 \\ 2-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{vmatrix}$

→ $\vec{SA} \cdot \vec{SB} = 2 \times 3 + (-2) \times (-2) + (-4) \times (-2) = 18$

et puisque $SA = \sqrt{24}$ et $SB = \sqrt{17}$

, on obtient $18 = \sqrt{24} \times \sqrt{17} \times \cos(\widehat{ASB})$

soit $\cos(\widehat{ASB}) = \dfrac{18}{\sqrt{24} \times \sqrt{17}}$

et $\widehat{ASB} = \cos^{-1}\left(\dfrac{18}{\sqrt{24} \times \sqrt{17}}\right) \approx 27{,}0°$.

Exercice au choix → exercice B

Partie A

1. on a $\left(e^{-\frac{1}{3}x}\right) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$

Donc $g'(x) = 2\times\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}$.

2. on résout $g'(x) = 0 \rightarrow e^{-\frac{1}{3}x} = 1 \rightarrow -\frac{1}{3}x = 0 \rightarrow x = 0$

et on déduit le signe de $g'(x)$ avec, par exemple, des valeurs test.

On obtient:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$g(0)=0$	↗	

en $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{3}x} = 0$ donc $g'(x) > 0$

3. on a $g(0) = 2e^{-\frac{1}{3}\times 0} + \frac{2}{3}\times 0 - 2 = 2\times 1 + 0 - 2 = 0$

et d'après les variations de g, on voit que la fonction g ne prend que des valeurs positives → sur $\mathbb{R}$, on a $g(x) \geq 0$.

Partie B

1. on applique le cours → on a $y' = -\frac{1}{3}y$

soit $y(x) = Ae^{-\frac{1}{3}x}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

2. on veut que $y(0) = 2$

soit $Ae^{-\frac{1}{3}0} = 2 \rightarrow A\times 1 = 2 \rightarrow \boxed{A = 2}$

on obtient donc : $y(x) = 2e^{-\frac{1}{3}x}$

3. a) on aura une équation de la tangente sous la forme

$$y = f'(0)\times(x-0) + f(0)$$

avec $f(0) = 2\times e^{-\frac{1}{3}\times 0} = 2$

et $f'(x) = 2\times\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-\frac{1}{3}x}$ soit $f'(0) = -\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}\times 0} = -\frac{2}{3}$

on obtient : $y = -\frac{2}{3}x + 2$

5) on cherche le signe de $f(x)-y$!

→ on a $f(x)-y = 2e^{-\frac{1}{3}x} - \left(-\frac{2}{3}x+2\right) = 2e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2$

→ on remarque que $f(x)-y = g(x)$ avec la fonction g qui est toujours positive (voir partie A).

on en déduit : $f(x)-y \geqslant 0$ pour tout x

soit $f(x) \geqslant y$

on a donc $\mathcal{C}_f$ toujours au dessus de cette tangente (Δ_0)

Partie C

1. en un point d'abscisse a quelconque, on aura :

$$y = f'(a)\times(x-a) + f(a)$$

soit $y = -\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}a}\times(x-a) + 2e^{-\frac{1}{3}a}$

et on cherche à résoudre $y=0$

soit $-\frac{2}{3}(x-a)+2=0$ (en simplifiant par $e^{-\frac{1}{3}a} \neq 0$)

soit $x-a = -2\times -\frac{3}{2} = 3$ → $\boxed{x = a+3}$

2. cette tangente passera par B et par le point P d'abscisse $(-2)+3=1$ et d'ordonnée 0 (le point P est sur l'axe des abscisses !).

→ on trace la droite (BP) avec $P(1;0)$.