Corrigé de l'épreuve de mathématiques

du Bac Spécialité Maths

Asie juin 2021 (pour candidats libres)

Sujet 2

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 : Les bonnes réponses de ce QCM sont :

1 - $\boxed{C}$ 2 - $\boxed{C}$ 3 - $\boxed{B}$ 4 - $\boxed{A}$ 5 - $\boxed{A}$

voici quelques éléments de justification (même si ce n'est pas demandé !).

Question 1. on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et on sait, avec les croissances comparées que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

Donc on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ → réponse $\boxed{C}$

(et, pour info, on aurait $f'(x) = (x^2 - 3)e^x$!!).

Question 2. il faut calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

en $-\infty$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc on a $\underbrace{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{3}{5}}$
(limite du type $\frac{3}{5+0}$)

asymptote horizontale d'équation $y = \frac{3}{5}$

en $+\infty$, on a $\underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ (limite du type $\frac{3}{+\infty}$)

asymptote horizontale d'équation $y = 0$

→ soit 2 asymptotes horizontales → réponse $\boxed{C}$.

Question 3 : on fait le tableau de signes de f''.

on obtient :

x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		concave		convexe		concave		convexe	

voici les 3 points d'inflexion

→ réponse $\boxed{B}$

<u>Question</u> 4 : on peut vérifier que la suite (U_n) est croissante et elle diverge vers $+\infty$.

Donc cette suite est minorée → réponse $\boxed{A}$

En affichant le tableau de valeurs de cette suite, on constate que la plus petite valeur obtenue est égale à -52 (on a $U_8 = -52$ et $U_9 = -52$).

On a, donc, $U_n \geq -52$ pour tout n.

<u>Question</u> 5 : cette fonction nous permet bien d'obtenir la première valeur de n qui permet de dépasser 45 (puisque la fonction "tourne" tant que les termes sont inférieurs à 45).

→ c'est donc bien la réponse $\boxed{A}$.

Exercice 2 :

1. on a $A\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$ $K\begin{vmatrix}1/2\\1\\0\end{vmatrix}$ $L\begin{vmatrix}0\\1\\3/2\end{vmatrix}$

$\rightarrow \overrightarrow{AK}\begin{vmatrix}1/2-0=1/2\\1-0=1\\0-0=0\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AL}\begin{vmatrix}0-0=0\\1-0=1\\\frac{3}{2}-0=\frac{3}{2}\end{vmatrix}$

2. ⓐ on doit vérifier que $\vec{n}$ est $\perp$ à 2 vecteurs du plan.
$\rightarrow$ on utilise le produit scalaire.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AK} = \begin{vmatrix}6\\-3\\2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1/2\\1\\0\end{vmatrix} = 6\times\frac{1}{2}+(-3)\times1+2\times0 = 3-3+0 = 0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AL} = \begin{vmatrix}6\\-3\\2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0\\1\\3/2\end{vmatrix} = 6\times0+(-3)\times1+2\times\frac{3}{2} = 0-3+3 = 0$

Donc on a bien $\vec{n}\perp\overrightarrow{AK}$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{AL}$

Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (AKL).

ⓑ Les coordonnées de $\vec{n}$ vont donc remplacer les lettres a, b et c de l'équation $ax+by+cz+d=0$

$\rightarrow$ on obtient $6x+(-3)y+2z+d=0$

soit $6x-3y+2z+d=0$

or A appartient au plan (AKL) $\rightarrow$ ses coordonnées doivent vérifier cette équation

$\rightarrow 6\times\underbrace{0}_{x_A}-3\times\underbrace{0}_{y_A}+2\times\underbrace{0}_{z_A}+d=0 \rightarrow d=0$

on obtient : $6x-3y+2z=0$

ⓒ Δ est dirigée par $\vec{n}$ et passe par D

$\rightarrow$ on obtient $\begin{cases}x=\boxed{0}\boxed{+6}k = 6k\\y=\boxed{1}\boxed{-3}k = 1-3k\\z=\boxed{0}\boxed{+2}k = 2k\end{cases}$

point D   vecteur directeur

ⓓ Le point N correspond à l'intersection de Δ et (AKL)

→ on résout $6(6k) - 3(1-3k) + 2(2k) = 0$

→ $49k = 3$ → $k = \frac{3}{49}$

et on obtient bien $N \begin{cases} x = 6 \times \frac{3}{49} = \frac{18}{49} \\ y = 1 - 3 \times \frac{3}{49} = \frac{40}{49} \\ z = 2 \times \frac{3}{49} = \frac{6}{49} \end{cases}$

3. ⓐ AKD est un triangle rectangle en D

→ Aire AKD $= \frac{AD \times DK}{2} = \frac{1 \times 1/2}{2} = \frac{1}{4}$

et la hauteur DL mesure $3/2$

Donc Volume ADKL $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \boxed{\frac{1}{8}}$

ⓑ on calcule la distance DN

$= \sqrt{(x_N - x_D)^2 + (y_N - y_D)^2 + (z_N - z_D)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{18}{49} - 0\right)^2 + \left(\frac{40}{49} - 1\right)^2 + \left(\frac{6}{49} - 0\right)^2} = \boxed{\frac{3}{7}}$

ⓒ on va exprimer le volume du tétraèdre ADKL en prenant AKL comme base et donc DN sera la hauteur correspondante.

on a : Volume $= \frac{1}{3} \times$ Aire AKL $\times$ DN

soit $\frac{1}{8} = \frac{1}{3} \times$ Aire AKL $\times \frac{3}{7}$

et on obtient Aire AKL $= \boxed{\frac{7}{8}}$

Exercice 3

1. cela correspond à placer les 3 cœurs PARMI les 9 cases

→ on calcule une combinaison $\binom{9}{3} = \boxed{84}$

2. Pour gagner, il y a 3 possibilités de lignes, 3 possibilités de colonnes et 2 possibilités de diagonales → $\boxed{8}$

→ probabilité(ticket gagnant) $= \frac{8}{84} = \boxed{\frac{2}{21}}$

3. on considère la loi de probabilité de la variable aléatoire qui donne le montant (algébrique) du gain

→ cette variable prend 2 valeurs : 4 € et −1 €

gain de 5 € − la mise de 1 €.

pas de gain − la mise de 1 €

on obtient :

x_i	4 €	−1 €
p_i	$\frac{2}{21}$	$\frac{19}{21}$

on calcule l'espérance $E(X) = 4\,€ \times \frac{2}{21} - 1\,€ \times \frac{19}{21} = -\frac{11}{21}\,€$

→ le jeu est défavorable pour le joueur (espérance négative)

4. a) on a une loi binomiale $B(n\,;p)$ de paramètres $n = 20$ et $p = p(\text{ticket gagnant}) = \frac{2}{21}$

b) on calcule $p(X=5) \simeq 0{,}027$ avec binomFdp

c) on a $P(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$ — on utilise à nouveau binomFdp

$\simeq 0{,}865$

→ sur 20 tickets, il y aura 86,5% de chances d'avoir au moins 1 ticket gagnant.

Exercice au choix → exercice A

Partie I

1. on a $U_1 = U_0 + 0{,}05(20 - U_0) = 1 + 0{,}05(20-1) = 1{,}95$

2. ⓐ on a $U_{n+1} = U_n + 0{,}05(20 - U_n)$

$$= U_n + 0{,}05 \times 20 - 0{,}05 U_n = 0{,}95 U_n + 1$$

ⓑ on a $V_n = 20 - U_n$ et donc $U_n = 20 - V_n$

on part de $V_{n+1} = 20 - U_{n+1}$

$$= 20 - (0{,}95 U_n + 1)$$
$$= 19 - 0{,}95 U_n$$
$$= 19 - 0{,}95(20 - V_n)$$
$$= \underbrace{19 - 0{,}95 \times 20}_{0} + 0{,}95 V_n$$

soit $V_{n+1} = 0{,}95 V_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $V_0 = 20 - U_0 = 20 - 1 = 19$

ⓒ on en déduit : $V_n = V_0 \times q^{(n-0)}$

$$= 19 \times 0{,}95^n$$

et, avec $U_n = 20 - V_n$, on a $U_n = 20 - 19 \times 0{,}95^n$

3. on a $-1 < 0{,}95 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}95^n = 0$

→ on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} 19 \times 0{,}95^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{20}$

Partie II

1. on a d'un côté $L'(t) = (20 - 19e^{-0{,}05t})'$

$$\rightarrow \quad L'(t) = 0 - 19 \times (-0{,}05)\, e^{-0{,}05t}$$

soit $L'(t) = 0{,}95\, e^{-0{,}05t}$

et on a aussi $0{,}05(20 - L(t)) = 0{,}05(20 - (20 - 19e^{-0{,}05t}))$

$$= 0{,}05 \times 19 e^{-0{,}05t}$$
$$= 0{,}95 e^{-0{,}05t}$$

Donc la fonction L vérifie bien l'équation $y' = 0{,}05(20 - y)$

et on a $L(0) = 20 - 19\underbrace{e^{-0{,}05 \times 0}}_{e^{-0} = 1} = 20 - 19 = \boxed{1}$

2 a) On sait que $L'(t) = 0{,}95 e^{-0{,}05t}$

$\rightarrow L'(0) = 0{,}95 e^{-0{,}05 \times 0} = 0{,}95$

et $L'(5) = 0{,}95 e^{-0{,}05 \times 5} \approx 0{,}74$

on a donc $L'(5) < L'(0)$.

b) on a $\lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}05t = -\infty$

Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}05t} = 0 \rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} L'(t) = 0$

→ donc, à terme, la vitesse de croissance diminue et va tendre vers zéro → c'est cohérent.

Exercice au choix → exercice B

Partie I

1. pour le moment, nous n'avons à disposition que la formule de récurrence $U_{n+1} = f(U_n) = U_n - \ln(U_n - 1)$

→ on calculera B3 à partir de B2.

La formule est $\boxed{= B2 - \ln(B2 - 1)}$

2. il semblerait que la suite (U_n) soit décroissante et qu'elle tende vers 2.

Partie II

1. on a $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$

(limite du type $1 - (-\infty)$)

2. a) on a $f(x) = x - \ln(x-1)$

on a $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x - 1$ et $u'(x) = 1$

soit $f'(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$

soit $f'(x) = \frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$

b) on a $x - 2 = 0$ lorsque $x = 2$

et $x - 1$ est toujours positif sur $]1\,;+\infty[$

on en déduit :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(2) = 2$	↗	$+\infty$

c) on a $f(2) = 2 - \ln(2-1) = 2$ → c'est le minimum de f

Donc, à fortiori, pour tout $x \geq 2$, on a bien $f(x) \geq 2$

Partie III

1. Init : on a $U_0 = 10 \geq 2 \rightarrow$ OK

   Hérédité : on suppose $U_n \geq 2$

   et d'après le 2.c on a $f(U_n) \geq 2$

   soit $U_{n+1} \geq 2 \rightarrow$ OK

2. on calcule $U_{n+1} - U_n = U_n - \ln(U_n - 1) - U_n$

   $= -\ln(U_n - 1)$

   or $U_n \geq 2 \rightarrow U_n - 1 \geq 1 \rightarrow \ln(U_n - 1) \geq 0$

   et donc $U_{n+1} - U_n = -\ln(U_n - 1) \leq 0$

   $\rightarrow$ la suite (U_n) est donc décroissante.

3. on a une suite (U_n) décroissante et minorée par 2.
   Elle est donc convergente.

4. on résout $\ell = f(\ell)$

   soit $\ell = \ell - \ln(\ell - 1)$

   soit $\ln(\ell - 1) = 0$

   $\rightarrow \ell - 1 = 1 \rightarrow \boxed{\ell = 2}$.