Corrigé de l'épreuve de mathématiques

du Bac Spécialité Maths

Amérique du Nord juin 2021

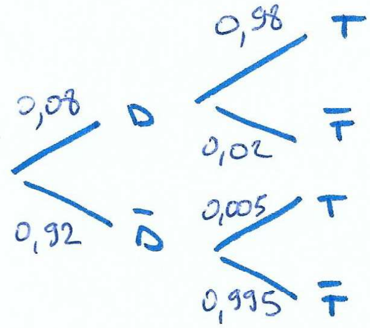
(pour candidats libres)

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1. on obtient l'arbre suivant



2. pour trouver $p(T)$, on utilise la formule des probabilités totales

$\to p(T) = p(D \cap T) + p(\bar{D} \cap T)$

$= 0,08 \times 0,98 + 0,92 \times 0,005 = \boxed{0,083}$

3. a) on cherche $p_T(D) = \dfrac{p(T \cap D)}{p(T)} = \dfrac{0,08 \times 0,98}{0,083}$

$\to$ on obtient $p_T(D) \simeq 0,945$

b) "un athlète présentant un test positif est dopé"

$\to$ cela correspond justement à $p_T(D)$

et on a $p_T(D) = 0,945 < 0,95$.

Donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B

1. a) on reconnait une loi binomiale $B(n\,;p)$

avec $n = 5$ et $p = p(T) = 0,103$.

b) on sait que $E(X) = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515$

et donc sur 5 athlètes pris au hasard, on peut s'attendre à avoir en moyenne "0,5 athlètes environ" qui seront positifs.

c) on cherche $p(X \geq 1)$

et on a $p(X \geq 1) = 1 - p(\underbrace{X=0}_{\text{avec binomFdp}}) \approx 0{,}419$

2. on cherche la valeur de n pour que $p(X \geq 1) \geq 0{,}75$

→ on va donner ici deux méthodes.

<u>méthode 1 → à la calculatrice.</u>

on a $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

et on utilise le tableau de valeurs de la calculatrice en rentrant comme fonction :

$$f(x) = 1 - \text{binomFdp}(X, 0.103, 0)$$

et on constate qu'à partir de $n = 13$, on obtient bien des valeurs supérieures à $0{,}75$.

<u>méthode 2 → calcul algébrique</u>

on a $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

avec $p(X=0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{n-0} = 0{,}897^n$

→ on résout donc $p(X \geq 1) \geq 0{,}75$

soit $1 - 0{,}897^n \geq 0{,}75$

soit $0{,}897^n \leq 0{,}25$ 1 − 0,75

soit $\ln 0{,}897^n \leq \ln 0{,}25$

soit $n \times \ln 0{,}897 \leq \ln 0{,}25$

soit $n \geq \underbrace{\dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}897}}_{\approx 12{,}75}$ ⚠ $\ln 0{,}897$ est négatif → on inverse le signe de l'inégalité.

soit à partir de 13 !

Exercice 2

1. pour 2021, on calcule $U_1 = 0{,}75\,U_0(1-0{,}15\,U_0)$

$$= 0{,}75 \times 0{,}6\,(1-0{,}15\times 0{,}6)$$
$$= 0{,}4095 \text{ milliers}$$
$$\approx 410 \text{ individus.}$$

pour 2022, on calcule $U_2 = 0{,}75\,U_1(1-0{,}15\,U_1)$

$$\approx 0{,}2883 \text{ milliers} \approx 288 \text{ individus.}$$

2. on peut développer $f(x) = 0{,}75x - 0{,}1125x^2$

soit $f'(x) = 0{,}75 - 0{,}1125 \times 2x = 0{,}75 - 0{,}225x$

→ on résout $0{,}75 - 0{,}225x = 0 \rightarrow x = \dfrac{0{,}75}{0{,}225} = \dfrac{10}{3}$

→ on obtient :

x	0		1	$\frac{10}{3}$	
$f'(x)$		$+$		0	$-$
$f(x)$		↗			↘

puisque $\frac{10}{3} > 1$, on voit que f est croissante sur $[0;1]$

on obtient finalement

x	0		1
$f(x)$	0	↗	$0{,}6375$

on calcule
$f(0)=0$ et $f(1) = 0{,}6375$

3. on résout $f(x) = x \rightarrow 0{,}75x - 0{,}1125x^2 = x$

soit $-0{,}25x - 0{,}1125x^2 = 0$

soit $x(-0{,}25 - 0{,}1125x) = 0$ équation produit nul

soit $x = 0$ ou $-0{,}25 - 0{,}1125x = 0$

$$x = -\frac{0{,}25}{0{,}1125} = -\frac{20}{9}$$

4. a) **Init** : on a bien $0 \leq \underset{(0{,}4095)}{U_1} \leq \underset{(0{,}6)}{U_0} \leq 1 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$

Hérédité : on suppose $0 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 1$

or la fonction f est croissante → elle conserve l'ordre.

on obtient : $f(0) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n) \leq f(1)$

soit $0 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq 0{,}6375 \ (\leq 1)$ → $\boxed{\text{OK !}}$

b) La suite (U_n) est décroissante ($U_{n+1} \leq U_n$) et minorée par 0 ($U_n \geq 0$) → (U_n) est donc convergente.

c) Sa limite ℓ va donc vérifier $f(\ell) = \ell$

D'après la question 3, les valeurs possibles sont 0 et $-\frac{20}{9}$

mais la limite ℓ ne peut ici être négative

→ $\boxed{\ell = 0}$

5. a) on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ donc la population va bien disparaître à terme.

b) on peut utiliser, par exemple, le tableau de valeurs de la calculatrice, en mode SUITE, avec la formule

$U_{n+1} = 0{,}75\, U_n (1 - 0{,}15\, U_n)$

→ on obtient $n = 11$ $\quad U_{10} \approx 0{,}0249$

$U_{11} \approx 0{,}0186$

→ on connaîtra l'année à partir de laquelle la population passe en dessous de 0,02 (milliers) soit 20 individus

On obtient $n = 11$ soit l'année 2031

(2020+11)

Exercice 3

1. Les points A, K et H sont dans un même plan.
Mais le point I n'appartient pas à ce plan.
→ les droites (AI) et (KH) ne peuvent pas être parallèles.

2. a) on a $I \begin{vmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ et $J \begin{vmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{vmatrix}$

b) on a $\overrightarrow{IJ} \begin{vmatrix} 1-1/2 = 1/2 \\ 1/2 - 0 = 1/2 \\ 0-1 = -1 \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{AE} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

(plutôt évident pour $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$)

et on constate très simplement que

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - 1 \times \overrightarrow{AE}$$

Donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont bien coplanaires.

3. on a $\vec{U}_{d_1}$, vecteur directeur de d_1 → $\vec{U}_{d_1} \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix}$

et $\vec{U}_{d_2}$, vecteur directeur de d_2 → $\vec{u}_{d_2} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$

(par lecture directe des représentations paramétriques)

→ il est évident que $\vec{U}_{d_1}$ et $\vec{U}_{d_2}$ ne sont pas colinéaires
Donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

4. Pour que la droite d_2 soit parallèle au plan P,
il faut par exemple montrer que le vecteur directeur $\vec{U}_{d_2}$
est $\perp$ au vecteur normal $\vec{n}$ du plan P.
→ avec l'équation du plan, on a $\vec{n} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{vmatrix}$

et on a $\vec{U}_{d_2} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$

→ on utilise le produit scalaire.

on calcule $\vec{u}_{d_2}\begin{vmatrix}1\\1\\2\end{vmatrix} \cdot \vec{n}\begin{vmatrix}1\\3\\-2\end{vmatrix}$

$= 1\times 1 + 1\times 3 + 2\times(-2)$

$= 1 + 3 - 4 = \boxed{0}$

Donc $\vec{u}_{d_2}\cdot\vec{n} = 0 \rightarrow \vec{u}_{d_2} \perp \vec{n} \rightarrow d_2$ est parallèle à P.

5. il faut montrer ici que :

- le point L appartient au plan P
- $\vec{ML} \perp$ plan P soit $\vec{ML}$ colinéaire à $\vec{n}$.

* on a $\underbrace{4}_{x_L} + 3\times\underbrace{0}_{y_L} - 2\times\underbrace{3}_{z_L} + 2 = 0$ en utilisant l'équation du plan P

$\rightarrow$ on a bien $L \in$ plan P.

* on a $\vec{ML}\begin{vmatrix}4-5=-1\\0-3=-3\\3-1=2\end{vmatrix}$ colinéaire à $\vec{n}\begin{vmatrix}1\\3\\-2\end{vmatrix}$

(on a $\vec{ML} = -\vec{n}$)

<u>conclusion</u> : on a bien le résultat voulu.

Exercice au choix → exercice A

AFFIRMATION 1 → $\boxed{\text{FAUX}}$

on a $(e^{a+b})^2 = e^{2(a+b)} = e^{2a+2b} = e^{2a} \times e^{2b}$

et non pas $\boxed{+}$!

(on aurait pu utiliser un contre exemple en remplaçant a par 0 et b par 1 :

on obtient $(e^{0+1})^2 = (e^1)^2 = e^2$

et $e^{2\times 0} + e^{2\times 1} = e^0 + e^2 = 1 + e^2 \neq e^2$!!)

AFFIRMATION 2 → $\boxed{\text{VRAI}}$

l'équation de la tangente s'écrira :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

avec $f(x) = -2 + (3-x)e^x \rightarrow f(0) = -2 + (3-0)e^0 = 1$

et $f'(x) = 0 + (-1)e^x + (3-x)e^x$ avec $(uv)' = u'v + uv'$

$= -e^x + (3-x)e^x \rightarrow f'(0) = -e^0 + (3-0)e^0 = 2$

on obtient bien : $y = 2(x-0) + 1 \rightarrow y = 2x + 1$.

AFFIRMATION 3 → $\boxed{\text{FAUX}}$

on factorise l'expression par e^{2x}

→ on obtient $e^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{3}{xe^x}\right)$

$+\infty$ $\quad \to 0 \quad \to 0$

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{3}{xe^x} = 1$

et donc par produit on obtient une limite égale à $+\infty$.

AFFIRMATION 4 → $\boxed{\text{VRAI}}$

on considère la fonction f définie par $f(x) = 1 - x + e^{-x}$

→ on a $f'(x) = -1 - e^{-x}$ car $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

On a, pour tout x, $e^{-x} > 0 \rightarrow -e^{-x} < 0 \rightarrow f'(x) < 0$

Donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$

avec $f(0) = 1 - 0 + e^{-0} = 2$

$f(2) = 1 - 2 + e^{-2} = -1 + e^{-2} \approx -0{,}86$

On obtient :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$		2	$f(2) \approx -0{,}86$	

→ l'application du corollaire du TVI nous donne l'unicité de la solution de $f(x) = 0$ sur $[0;2]$.

AFFIRMATION 5 → $\boxed{\text{VRAI}}$

on a $g(x) = x^2 - 5x + e^x$

→ $g'(x) = 2x - 5 + e^x$

→ $g''(x) = 2 + e^x$

et, avec $e^x > 0$ pour tout x, on obtient $g''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$

→ g est bien convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice au choix → exercice B

1. $f(1)$ → image de 1 → $\boxed{4}$

$f'(1)$ → coefficient directeur de la tangente en 1 → $\boxed{0}$ tangente horizontale

2. on applique $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = a + b\ln x$

$u'(x) = 0 + b \times \frac{1}{x} = \frac{b}{x}$

et $v(x) = x$

$v'(x) = 1$

$\rightarrow f'(x) = \dfrac{\frac{b}{x} \times x - (a + b\ln x) \times 1}{x^2}$ $\rightarrow f'(x) = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2}$

3. on a $f(1) = 4 \rightarrow \dfrac{a + b\ln 1}{1} = 4 \rightarrow \boxed{a = 4}$ $(\ln 1 = 0)$

on a $f'(1) = 0 \rightarrow \dfrac{b - a - b\ln 1}{1^2} = 0 \rightarrow b - a = 0$

$\rightarrow \boxed{b = a = 4}$

4. * on a $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \boxed{-\infty}$ (limite du type $\frac{4 - \infty}{0} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$)

* on a $f(x) = \dfrac{4 + 4\ln x}{x} = \dfrac{4}{x} + 4\dfrac{\ln x}{x}$ → tend vers 0 (croissances comparées)

$\frac{4}{x}$ ↳ tend vers 0

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{0}$

5. en utilisant le 2) et le 3), on sait que :

$$f'(x) = \frac{4 - 4 - 4\ln x}{x^2} = \frac{-4\ln x}{x^2}$$

on obtient donc

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$-4\ln x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0

$f(1)$

6. on a $f'(x) = \dfrac{-4\ln x}{x^2}$

→ on calcule $f''(x)$ en utilisant $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = -4\ln x$

$u'(x) = -4 \times \dfrac{1}{x} = -\dfrac{4}{x}$

et $v(x) = x^2$

$v'(x) = 2x$

on obtient : $f''(x) = \dfrac{-\frac{4}{x} \times x^2 - (-4\ln x) \times 2x}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{-4x + 8x\ln x}{x^4} = \dfrac{-4 + 8\ln x}{x^3}$

(en simplifiant par x)

7. on cherche donc le signe de $f''(x)$

→ on résout $-4 + 8\ln x = 0 \rightarrow \ln x = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$\rightarrow x = e^{1/2}$

on obtient :

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		concave		convexe	

point d'inflexion de coordonnées

$\left(e^{1/2} ; f(e^{1/2})\right)$

avec $f(e^{1/2}) = \dfrac{4 + 4\ln e^{1/2}}{(e^{1/2})} = \dfrac{4 + 4 \times \frac{1}{2}}{e^{1/2}} = \dfrac{6}{e^{1/2}}$