Comment développer avec la double distributivité (rappel)

Vous devez faire le bilan de votre réussite lorsque le développement ne concerne que des nombres *positifs* ou s'il intègre des *négatifs*. Souvent, vous savez développer mais les erreurs sont dues à des soucis de signes. Sachez donc bien différencier et identifier les compétences, puis faites des efforts particuliers là où c'est particulièrement nécessaire.

Un rappel du principe général

En général, on s'aide avec un système visuel de "*flèches*", qui symbolisent les nombres à multiplier ensemble, avec une petite phrase à mémoriser : " ***une flèche = une multiplication*** ".

On aura : $(a+b)(c+d) = a\times c \boxplus a\times d \boxplus b\times c \boxplus b\times d$

Exemple : on développe l'expression $(3x+4)(5x+2)$

$\rightarrow$ on obtient $3x\times 5x \boxplus 3x\times 2 \boxplus 4\times 5x \boxplus 4\times 2$

$= 15x^2 \boxplus \underbrace{6x \boxplus 20x} \boxplus 8$

$= 15x^2 + 26x + 8$

Et avec des nombres négatifs ?

L'enjeu est de ne pas confondre la règle des signes pour les multiplications avec celle des additions.

$\rightarrow$*pour le développement*, je vais rappeler les deux méthodes principales. Choisissez en une des deux !!

$\rightarrow$*pour la réduction*, il **ne faut pas** donner le résultat " $-30x-12x=+42x$ " avec une phrase du type "moins ET moins, ça fait plus", ni donner le résultat " $-30x-12x=-28x$ " sans tenir compte que les deux nombres sont négatifs. Le **bon résultat** est plutôt " $-30x-12x=-42x$ ".

On développe : $(5x-4)(3x-6)$	
Méthode 1 : $5x\times 3x \boxplus 5x\times(-6) \boxplus -4\times 3x \boxplus -4\times(-6)$ $= 15x^2 \boxplus \underbrace{-30x \boxplus -12x} \boxplus 24$ $= 15x^2 - 42x + 24$	Méthode 2 : $+\dots - \dots - \dots + \dots$ (on a les signes) $= +15x^2 \underbrace{-30x - 12x} + 24$ (on met les résultats) $= 15x^2 - 42x + 24$

Quelques exemples pour que vous puissiez vérifier si vous savez bien faire

Entrainez vous, je vous donne ici l'expression de départ et le résultat après développement et réduction !

a) $(x+3)(5x+4)$ = ... $\rightarrow$ on obtient $5x^2+19x+12$

b) $(4x+2)(8x-3)$ = ... $\rightarrow$ on obtient $32x^2+4x-6$

c) $(5x-6)(x+4)$ = ... $\rightarrow$ on obtient $5x^2+14x-24$

d) $(7x-2)(3x-5)$ = ... $\rightarrow$ on obtient $21x^2-41x+10$

Et n'oubliez pas si nécessaire de revoir et d'utiliser les fiches disponibles dans les chapitres de 4e !!

Comment développer une expression du type $(a+b)^2$
Les identités remarquables

Il ne faudra jamais oublier que ces identités remarquables sont un "*moyen*" et non pas une "*fin en soi* ". Elles permettent d'aller plus vite, d'être plus efficace mais elles doivent être utilisées ***sans aucune erreur***. Car, sinon, autant revenir à la définition $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ et utiliser la double distributivité !

Un exemple avec $(3x+5)^2$

→ ***on utilise le fait que*** $(3x+5)^2 = (3x+5)(3x+5)$

On obtient $(3x+5)^2 = (3x+5)(3x+5)$

$= 9x^2 + \underbrace{15x + 15x} + 25$

$= 9x^2 + 30x + 25$

On peut visualiser que, même en changeant les nombres, on aura toujours :
- *deux résultats* qui correspondent à chacun des termes que l'on met ***au carré***.
- *deux résultats* qui seront toujours égaux (ici, c'est $15x$) et qui s'additionne : c'est le "***double produit***".

L'identité remarquable $(a+b)^2$

Si on généralise le raisonnement de l'exemple précédent, on obtient un résultat général qui s'appelle une "***identité remarquable***", que l'on notera " IR1 " dans la suite du chapitre .

On aura : $(a+b)^2 = a^2 + \underbrace{2 \times a \times b} + b^2$

c'est le DOUBLE PRODUIT

Exemple : on va retrouver avec cette IR1 le résultat du développement de $(3x+5)^2$

→ on a $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + (5)^2$

$= 9x^2 + 30x + 25$

On applique cette identité remarquable IR1 avec quelques exemples

C'est plutôt facile à appliquer, mais évitez l'erreur en oubliant de multiplier par deux le "*double produit*".

Développer et réduire $(6x+5)^2$

→ on a $(6x+5)^2 = (6x)^2 + 2 \times 6x \times 5 + (5)^2$

$= 36x^2 + 60x + 25$

Développer et réduire $(3x+1)^2$

→ on a $(3x+1)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + (1)^2$

$= 9x^2 + 6x + 1$

Développer et réduire $(x+7)^2$

→ on a $(x+7)^2 = (x)^2 + 2 \times x \times 7 + (7)^2$

$= x^2 + 14x + 49$

Développer et réduire $(2+3x)^2$

→ on a $(2+3x)^2 = (2)^2 + 2 \times 2 \times 3x + (3x)^2$

attention à l'ordre des lettres $= 4 + 12x + 9x^2$

Comment développer une expression du type (a - b) ²
Les identités remarquables

Il ne faudra jamais oublier que ces identités remarquables sont un "*moyen*" et non pas une "*fin en soi* ". Elles permettent d'aller plus vite, d'être plus efficace mais elles doivent être utilisées ***sans aucune erreur***. Car, sinon, autant revenir à la définition $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$ et utiliser la double distributivité !

Un exemple avec (2 *x* - 6) ²

→ ***on utilise le fait que*** $(2x - 6)^2 = (2x - 6)(2x - 6)$

on obtient $(2x-6)^2 = (2x-6)(2x-6)$

$= 4x^2 \underbrace{-12x-12x} + 36$

$= 4x^2 - 24x + 36$

On peut visualiser que, même en changeant les nombres, on aura toujours :

- *deux résultats* qui correspondent à chacun des termes que l'on met ***au carré***.
- *deux résultats* qui seront toujours égaux (ici, c'est - 12*x*) et qui s'additionne : c'est le "***double produit***", qui sera ***toujours négatif*** avec $(a - b)^2$.

L'identité remarquable (*a* - *b*) ²

Si on généralise le raisonnement de l'exemple précédent, on obtient un résultat général qui s'appelle une "***identité remarquable***", que l'on notera " IR2 " dans la suite du chapitre .

on aura : $(a-b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$ c'est le DOUBLE PRODUIT négatif !

Exemple : on va retrouver avec cette IR2 le résultat du développement de $(2x - 6)^2$

→ on a $(2x-6)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 6 + (6)^2$

$= 4x^2 - 24x + 36$

On applique cette identité remarquable IR2 avec quelques exemples

C'est plutôt facile à appliquer, mais évitez les erreurs en oubliant de multiplier par deux le "*double produit*" ou en gérant mal le signe " - " avec un oubli, une mauvaise position, une inversion ....

Développer et réduire $(5x - 6)^2$ → on a $(5x-6)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 6 + (6)^2$ $= 25x^2 - 60x + 36$
Développer et réduire $(x - 3)^2$ → on a $(x-3)^2 = (x)^2 - 2 \times x \times 3 + (3)^2$ $= x^2 - 6x + 9$
Développer et réduire $(7x - 1)^2$ → on a $(7x-1)^2 = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 1 + (1)^2$ $= 49x^2 - 14x + 1$
Développer et réduire $(3 - 2x)^2$ → on a $(3-2x)^2 = (3)^2 - 2 \times 3 \times 2x + (2x)^2$ attention à l'ordre des lettres ! $= 9 - 12x + 4x^2$

Comment développer une expression du type (a + b)(a – b)
Les identités remarquables

Il ne faudra jamais oublier que ces identités remarquables sont un "*moyen*" mais pas une "*fin en soi*". Elles permettent d'aller plus vite, d'être plus efficace mais elles doivent être utilisées ***sans aucune erreur***. Car, sinon, autant utiliser directement la double distributivité pour développer (a + b)(a - b) !

Un exemple avec ($5x$ - 4)($5x$ + 4)

On obtient $(5x-4)(5x+4) = 25x^2 + \underbrace{20x - 20x}_{0x\,!!} - 16$

$= 25x^2 - 16$ (plus de "x" !!)

On peut comprendre que, même en changeant les nombres, on aura toujours :
- *deux résultats* qui correspondent aux termes que l'on met *au carré*, mais avec un des deux qui sera précédé d'un signe " - " à cause de la multiplication d'un "*positif*" par un "*négatif*".
- *deux résultats* qui seront toujours opposés (ici, c'est $20x$ et $- 20x$) et qui en s'additionnant vont s'annuler → pas de double produit dans le résultat final...plus de termes en "x".....

L'identité remarquable (a + b)(a – b)

Si on généralise le raisonnement de l'exemple précédent, on obtient un résultat général qui s'appelle une "***identité remarquable***", que l'on notera dans la suite du chapitre "IR3".

On aura : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
et aussi : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
→ l'ordre des parenthèses n'a aucune importance ici !

Exemple : on va retrouver avec cette IR3 le résultat du développement de ($5x$ - 4)($5x$ + 4)

→ on a $(5x-4)(5x+4) = (5x)^2 - (4)^2$
$= 25x^2 - 16$

On applique cette identité remarquable IR3 avec quelques exemples

C'est un résultat facile à appliquer, mais on voit souvent l'erreur qui consiste à oublier le signe "*moins*".

Développer et réduire ($6x$ + 5)($6x$ - 5) → on a $(6x+5)(6x-5) = (6x)^2 - (5)^2$ $= 36x^2 - 25$
Développer et réduire ($3x$ - 1)($3x$ + 1) → on a $(3x-1)(3x+1) = (3x)^2 - (1)^2$ $= 9x^2 - 1$
Développer et réduire (x + 7)(x - 7) → on a $(x+7)(x-7) = (x)^2 - (7)^2$ $= x^2 - 49$
Développer et réduire (2 - $3x$)(2 + $3x$) → on a $(2-3x)(2+3x) = (2)^2 - (3x)^2$ attention à l'ordre des lettres ! $= 4 - 9x^2$

Un bilan avec les trois identités remarquables

Il est important de savoir passer d'une identité remarquable à l'autre sans les confondre.
Il y a un apprentissage par cœur à faire, en utilisant par exemple une mémoire photographique et visuelle.
En effet, pour chaque identité remarquable, le résultat final sera TOUJOURS de la même forme.

Aide-mémoire visuel

Avec l'identité remarquable IR1, en partant de $(\square x + \square)^2$ on obtient forcément un résultat du type $\square x^2 + \square x + \square$.
Avec l'identité remarquable IR2, en partant de $(\square x - \square)^2$ on obtient forcément un résultat du type $\square x^2 - \square x + \square$.
Avec l'identité remarquable IR3, en partant de $(\square x + \square)(\square x - \square)$ ou $(\square x - \square)(\square x + \square)$ on obtient forcément un résultat du type $\square x^2 - \square$.

Les trois identités remarquables appliquées avec les mêmes nombres

Cela va permettre de bien mémoriser les trois identités remarquables avec leur point commun (les valeurs numériques...) et leurs différences (les signes ...).

$(4x+5)^2 \rightarrow$ IR1 $\rightarrow 16x^2 + 40x + 25$

$(4x-5)^2 \rightarrow$ IR2 $\rightarrow 16x^2 - 40x + 25$

$(4x+5)(4x-5) = (4x-5)(4x+5) \rightarrow$ IR3 $\rightarrow 16x^2 - 25$

$(7x+3)^2 \rightarrow$ IR1 $\rightarrow 49x^2 + 42x + 9$

$(7x-3)^2 \rightarrow$ IR2 $\rightarrow 49x^2 - 42x + 9$

$(7x-3)(7x+3) = (7x+3)(7x-3) \rightarrow$ IR3 $\rightarrow 49x^2 - 9$

Les trois identités remarquables en vrac

Entrainez vous à bien les reconnaitre pour parfaitement trouver chaque résultat.

On développe $(5x-6)^2 \rightarrow$ IR2 $\rightarrow 25x^2 - 60x + 36$
On développe $(4x+3)(4x-3) \rightarrow$ IR3 $\rightarrow 16x^2 - 9$
On développe $(8x+2)^2 \rightarrow$ IR1 $\rightarrow 64x^2 + 32x + 4$
On développe $(x-9)(x+9) \rightarrow$ IR3 $\rightarrow x^2 - 81$
On développe $(2x+10)^2 \rightarrow$ IR1 $\rightarrow 4x^2 + 40x + 100$
On développe $(6x-3)^2 \rightarrow$ IR2 $\rightarrow 36x^2 - 36x + 9$

Comment factoriser une expression avec une identité remarquable

On dit souvent que "*factoriser une expression*", c'est comme si on faisait "*l'inverse*" d'un développement.
En effet, en passant de $(3x+4)^2$ à $9x^2+24x+16$, on a **développé** (et réduit) l'expression.
Mais, si on passe maintenant de $9x^2+24x+16$ à $(3x+4)^2$, alors on a **factorisé** l'expression.

La méthode pour factoriser avec un identité remarquable

Je vous conseille de faire cette factorisation en plusieurs étapes :

- il faut reconnaitre visuellement quelle est l'identité remarquable qui donne le résultat proposé.
- on prépare alors les parenthèses qui correspondent à l'identité remarquable reconnue.
  - si on reconnait IR1, alors on écrit $(... + ...)^2$
  - si on reconnait IR2, alors on écrit $(... - ...)^2$
  - si on reconnait IR3, alors on écrit $(... + ...)(... - ...)$ ou $(... - ...)(... + ...)$
- on complète avec les nombres qui mis au carré nous donneraient les résultats du développement.

Attention, le double produit ne sert pas pour la factorisation, il servira juste pour une vérification.

Exemple 1 : on factorise $25x^2+40x+16$ → IR1 → $(... + ...)^2$

On obtient $(5x+4)^2$

pour obtenir $25x^2$; pour obtenir 16

On a donc : $25x^2+40x+16=(5x+4)^2$

Exemple 2 : on factorise $9x^2-12x+4$ → IR 2 → $(... - ...)^2$

On obtient $(3x-2)^2$

pour obtenir $9x^2$; pour obtenir 4

On a donc : $9x^2-12x+4=(3x-2)^2$

Exemple 3 : on factorise $36x^2-49$ → IR3 → $(... + ...)(... - ...)$

On obtient $(6x+7)(6x-7)$

pour obtenir $36x^2$; pour obtenir 49

On a donc : $36x^2-49=(6x+7)(6x-7)$

Quelques exemples de factorisation : entrainez vous !!

On factorise $x^2+10x+25$ → IR1 → $(... + ...)^2$ → $(x+5)^2$
On factorise $25x^2+80x+64$ → IR1 → $(... + ...)^2$ → $(5x+8)^2$
On factorise $4x^2-4x+1$ → IR2 → $(... - ...)^2$ → $(2x-1)^2$
On factorise $49x^2-42x+9$ → IR2 → $(... - ...)^2$ → $(7x-3)^2$
On factorise $9x^2-16$ → IR3 → $(.. + ..)(... - ...)$ → $(3x+4)(3x-4)$
On factorise x^2-100 → IR3 → $(.. + ..)(.. - ...)$ → $(x+10)(x-10)$