Comment développer une expression : rappel de la simple distributivité

Développer une expression, c'est passer d'un produit du type $3\times(4x+5)$ à une somme égale à $12x+15$. Ce principe du *développement* utilise la règle de la *distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (ou par rapport à la soustraction).*
Pour s'aider à visualiser les calculs, on met souvent en place un ***système de flêches***, avec une petite phrase que l'on peut se répéter : "***une flêche = une multiplication***".

Les quatre possibilités de base à bien mémoriser

Vous pouvez appliquer par coeur les principes suivants (et votre *mémoire visuelle* doit fonctionner ici) :

- le résultat $12x+15$ ne se réduit pas , il ne se simplifie pas (ce n'est pas égal à $27x$ par exemple).
- si on part de $3\times(4x+5)$ alors la régle des signes pour les multiplications nous donne ***deux*** résultats qui seront ***positifs***.
- si on part de $3\times(4x-5)$ alors, avec la règle des signes, le ***deuxième*** résultat sera ***négatif***.
- si on part de $-3\times(4x+5)$ alors, avec la règle des signes, les ***deux*** résultats seront ***négatifs***.
- si on part de $-3\times(4x-5)$ alors, avec la règle des signes, le ***premier*** résultat sera ***négatif***.

On a $3(4x+5) = 12x+15$
On a $3(4x-5) = 12x-15$
On a $-3(4x+5) = -12x-15$
On a $-3(4x-5) = -12x+15$

Quelques exemples supplémentaires

Avant de se lancer dans les exercices, vous devez vérifier vos réponses avec les exemples suivants.

On développe : $4(2x-5) \rightarrow 4(2x-5) = 8x-20$

On développe : $-5(3x-2) \rightarrow -5(3x-2) = -15x+10$

On développe : $-7(-x+1) \rightarrow -7(-x+1) = 7x-7$

On développe : $3(5-2x) \rightarrow 3(5-2x) = 15-6x = -6x+15$

Une combinaison de plusieurs développements

Dans les calculs suivants, on aura deux ou trois *développements* à faire avec la simple distributivité (donc entre chaque parenthèse et le nombre qui la précède). Et, à la fin, il faudra *réduire* l'expression obtenue.

a) On développe : $5(2x+3)-4(x-2) \quad \rightarrow 5(2x+3)-4(x-2)$

$$= 10x+15-4x+8$$
$$= \underbrace{10x-4x}+\underbrace{15+8}$$
$$= 6x+23$$

b) On développe : $4(x-1)-3(5x-2)+2(4x+1) \quad \rightarrow 4(x-1)-3(5x-2)+2(4x+1)$

$$= 4x-4-15x+6+8x+2$$
$$= \underbrace{4x-15x+8x}\underbrace{-4+6+2}$$
$$= -3x+4$$

Comment développer avec la double distributivité : la méthode

Le but va être de développer une expression du type $(2x + 3)(4x + 5)$.
On va commencer par une fiche où il n'y aura que des nombres positifs. Le but est de bien mettre en place la méthode, pour ensuite réussir les développements utilisant des nombres négatifs.

La règle de la double distributivité

On se rappelle de la petite phrase "***une flèche = une multiplication***".
Il va y avoir ici **4 flèches** qui vont **toujours d'une parenthèse à l'autre** (*ne jamais mettre une flèche avec des nombres de la même parenthèse*).

pour tous nombres a, b, c et d :

$$(a+b)(c+d) = a\times b \boxed{+} a\times d \boxed{+} b\times c \boxed{+} b\times d$$

La méthode avec un exemple

On se souviendra de quelques règles de base :

- dès que l'on a $x \times x$, alors le résultat est égal à x^2. Voilà pourquoi $2x \times 3x = 6x^2$.
- la ***première étape*** du calcul amène à effectuer ***quatre multiplications***.
- la ***deuxième étape*** consiste à ***réduire*** l'expression. On fait alors des *additions/soustractions*. Dans cet exemple, c'est les "*termes en x*" qu'il faudra regrouper.
- on prend l'habitude d'écrire, dans l'ordre, les termes en x^2 , les termes en x , et enfin ceux "*sans x*".

On développe l'expression : $(2x + 3)(4x + 5)$

$$= 2x\times 4x \boxed{+} 2x\times 5 \boxed{+} 3\times 4x \boxed{+} 3\times 5$$
$$= 8x^2 + \underbrace{10x + 12x} + 15$$
$$= 8x^2 + 22x + 15$$

Quelques exemples pour s'entrainer

Vous allez rapidement voir l'aspect "*mécanique*" de ces développements. On fait toujours la même chose !

On développe l'expression : $(3x + 4)(2x + 5)$

$$= 3x\times 2x \boxed{+} 3x\times 5 \boxed{+} 4\times 2x \boxed{+} 4\times 5$$
$$= 6x^2 + \underbrace{15x + 8x} + 20$$
$$= 6x^2 + 23x + 20$$

On développe l'expression : $(x + 7)(x + 3)$

$$= x\times x \boxed{+} x\times 3 \boxed{+} 7\times x \boxed{+} 7\times 3$$
$$= x^2 + \underbrace{3x + 7x} + 21$$
$$= x^2 + 10x + 21$$

Comment développer avec la double distributivité : bien gérer les négatifs

On constate une très bonne réussite des élèves tant que l'on travaille avec des nombres positifs MAIS le taux de réussite chute dès que les mêmes compétences sont en jeu avec des nombres négatifs.

La méthode : il y a 2 possibilités pour bien développer

Quelle que soit la méthode choisie, il faudra finalement connaitre parfaitement la ***régle des signes d'une multiplication*** (cette règle est donc à revoir si nécessaire).

N'oubliez pas, à la fin, de réduire l'expression et évitez le "calcul mental faux" : on est trop déçu, alors que le début était juste, de lire " - 12x - 10x = - 2x " alors que le bon résultat est "- 22x" !!

Première méthode : on écrit bien ***toutes*** les multiplications avec l'ensemble des termes et leur signe.
Dans cette méthode, vous mettrez au départ ***toujours un*** + entre les différentes multiplications.
→ on va ainsi développer l'expression **$(3x - 2)(5x - 4)$**

On obtient : $3x \times 5x \boxed{+} 3x \times (-4) \boxed{+} -2 \times 5x \boxed{+} -2 \times (-4)$

$= 15x^2 \boxed{+} \underbrace{-12x \boxed{+} -10x} \boxed{+} +8$

$= 15x^2 \quad -22x \quad +8$

qui correspond à $-12x - 10x$.

Deuxième méthode : elle consiste à faire le développement en deux étapes.
L'étape 1 consiste à n'écrire ***que les signes*** des résultats des multiplications.
L'étape 2 consiste ensuite à multiplier les nombres SANS S'OCCUPER DES SIGNES.
→ on va à nouveau développer l'expression **$(3x - 2)(5x - 4)$**

$\boxed{+}\times\boxed{+}$ $\quad\boxed{+}\times\boxed{-}$ $\quad\boxed{-}\times\boxed{+}$ $\quad\boxed{+}\times\boxed{+}$

On obtient : $+ \dots - \dots - \dots + \dots$ (on a les signes)

$= + \underbrace{15x^2}_{3x\times5x} - \underbrace{12x}_{3x\times4} - \underbrace{10x}_{2\times5x} + \underbrace{8}_{2\times4}$ (on met les résultats)

$= 15x^2 \quad -22x \quad +8$

Quelques exemples pour s'entrainer

On va continuer, pour ces exemples, à utiliser les deux méthodes ci-dessus.

On développe : $(5x - 2)(4x + 3)$	
Méthode 1 : $5x\times4x \boxed{+} 5x\times3 \boxed{+} -2\times4x \boxed{+} -2\times3$ $=20x^2 \boxed{+} \underbrace{15x \boxed{+} -8x} \boxed{+} -6$ $=20x^2 \quad +7x \quad -6$	Méthode 2 : $+ \dots + \dots - \dots - \dots$ $= +20x^2 \underbrace{+15x - 8x} - 6$ $= 20x^2 \quad +7x \quad -6$

On développe : $(2x + 3)(4x - 5)$	
Méthode 1 : $2x\times4x \boxed{+} 2x\times(-5) \boxed{+} 3\times4x \boxed{+} 3\times(-5)$ $= 8x^2 \boxed{+} \underbrace{-10x \boxed{+} 12x} \boxed{+} -15$ $= 8x^2 \quad +2x \quad -15$	Méthode 2 : $+ \dots - \dots + \dots - \dots$ $= +8x^2 \underbrace{-10x + 12x} - 15$ $= 8x^2 \quad +2x \quad -15$

La règle de suppression des parenthèses

Cette règle va s'appliquer quand on a des parenthèses sans aucun nombre ou aucune parenthèse devant.
→ ***on va travailler avec des expressions du type*** $(2x - 3) + (-4x + 5) - (6x + 7)$.
On constate que l'on a "*rien*" ou juste un signe " + " *ou* " - " devant chaque parenthèse.

L'énoncé de la règle de suppression des parenthèses

- si devant une parenthèse, il n'y a ***"rien"*** alors vous pouvez enlever la parenthèse ***"sans rien changer"***.
- si devant une parenthèse, il y a un ***" + "*** alors vous pouvez enlever la parenthèse ***"sans rien changer"***.
- par contre, si devant une parenthèse, il y a un ***" - "*** alors, pour enlever la parenthèse, il faut "***changer chaque signe"*** des termes de l'ensemble de la parenthèse.

On va illustrer cette règle

On aura : $(a - b) + (c - d) - (e - f)$ ⚠

$= \underbrace{a - b}_{\text{aucun changement}} + \underbrace{c - d}_{\text{aucun changement}} \underbrace{- e + f}_{\text{ON A CHANGÉ CHAQUE SIGNE}}$

Les quatre exemples de base à bien mémoriser

On va appliquer cette règle avec des parenthèses constituées des mêmes termes, mais devant lesquels *on va changer les signes au fur et à mesure*. Cela doit vous permettre d'observer l'incidence de ces signes placés devant ces parenthèses (*on n'oubliera que la phase finale du calcul est une réduction)*.

On part de $(8x - 3) + (2x - 5)$ → $(8x - 3) + (2x - 5)$ il n'y aura rien à changer ! $= \underbrace{8x - 3}_{\text{aucun changement}} + \underbrace{2x - 5}_{\text{aucun changement}}$ $= 8x + 2x - 3 - 5 \quad = 10x - 8$
On part de $(8x - 3) - (2x - 5)$ → $(8x - 3) - (2x - 5)$ il faudra changer $2x$ et -5. $= \underbrace{8x - 3}_{\text{aucun changement}} \underbrace{- 2x + 5}_{\text{on a changé chaque signe}}$ $= 8x - 2x - 3 + 5 \quad = 6x + 2$
On part de $-(8x - 3) + (2x - 5)$ → $-(8x - 3) + (2x - 5)$ il faudra changer $8x$ et -3 $= \underbrace{-8x + 3}_{\text{on a changé chaque signe}} + \underbrace{2x - 5}_{\text{aucun changement}}$ $= -8x + 2x + 3 - 5 \quad = -6x - 2$
On part de $-(8x - 3) - (2x - 5)$ → $-(8x - 3) - (2x - 5)$ il faudra changer l'ensemble des termes $= \underbrace{-8x + 3}_{\text{on a changé chaque signe}} \underbrace{- 2x + 5}_{\text{on a changé chaque signe}}$ $= -8x - 2x + 3 + 5 \quad = -10x + 8$

Calcul avec double distributivité et suppression des parenthèses

On va voir sur cette fiche des calculs ambitieux car, pour arriver jusqu'au bout, il faut appliquer *trois compétences* sans faire aucune erreur : ***développer*** , ***supprimer des parenthèses*** et ***réduire***.
Il va falloir, bien sûr, faire l'ensemble de ces calculs en étant très soigneux et très méthodique.

La méthode générale (en 3 étapes)
L'étape 1 est une étape de ***développement*** : il faudra ***développer*** des expressions et il faudra apprendre à bien ***protéger*** les résultats obtenus à l'intérieur de parenthèses.
L'étape 2 consiste à enlever ces parenthèses avec la ***règle de suppression des parenthèses***.
L'étape 3 consiste à organiser le calcul en regroupant les termes afin de ***réduire*** l'expression.

La méthode avec l'expression $(2x + 5)(3x + 4) + (x + 2)(5x + 3)$
On va mettre en place cette méthode avec une expression "*facile*" car elle n'a que des nombres positifs.

On a : $(2x+5)(3x+4) + (x+2)(5x+3)$

on développe et on protège les résultats avec des parenthèses

$= (6x^2+8x+15x+20) + (5x^2+3x+10x+6)$

$= 6x^2+8x+15x+20 + 5x^2+3x+10x+6$

aucun changement de signe   aucun changement de signe

$= 6x^2+5x^2+8x+15x+3x+10x+20+6$

on regroupe les termes et on réduit l'expression

$= 11x^2 + 36x + 26$

La méthode avec l'expression $(3x - 1)(2x + 4) - (x - 4)(2x - 3)$
On va pouvoir passer maintenant à une expression remplie de " - ". Attention aux erreurs de calculs !

On a : $(3x-1)(2x+4) - (x-4)(2x-3)$

on développe et on protège les résultats avec des parenthèses

$= (6x^2+12x-2x-4) - (2x^2-3x-8x+12)$

$= 6x^2+12x-2x-4 -2x^2+3x+8x-12$

aucun changement de signe   ⚠ on a changé CHAQUE signe

$= 6x^2-2x^2+12x-2x+3x+8x-4-12$

on regroupe les termes et on réduit l'expression

$= 4x^2 + 21x - 16$