Comment calculer la valeur d'une expression littérale (rappel)

Cette compétence est très importante pour la suite. Elle est une porte ouverte sur la notion de *fonctions* et de *calculs d'images*. Mais, comme souvent, "*importante*" ne veut pas dire "*difficile*". Il y a juste quelques règles de bases à respecter et quelques pièges à savoir éviter.

La méthode

Pour calculer la valeur d'une expression littérale, il **suffit de remplacer les différentes lettres** de ces expressions par les nombres qui sont associés aux lettres.
Il y a deux règles d'or à bien respecter :
- bien faire apparaitre dans le calcul ***les signes × des multiplications***.
- bien ***protéger*** les nombres négatifs *qui remplacent les lettres* avec des parenthèses.

Astuce : ne cherchez pas forcément à faire du calcul mental, utilisez plutôt votre calculatrice !!

Exemple 1 : calculer l'expression $3(2x+1)(4x+6)$ pour $x = 5$

On obtient $3 \times (2 \times 5 + 1) \times (4 \times 5 + 6) = 858$

Exemple 2 : calculer l'expression $3(2x+1)(4x+6)$ pour $x = -5$

On obtient $3 \times (2 \times (-5) + 1) \times (4 \times (-5) + 6) = 378$

Les pièges à bien savoir éviter

a) on veut calculer l'expression x^2 pour $x = -4$

Vous ferez particulièrement attention ici, car c'est l'erreur la plus fréquemment faite par les élèves !!

Si vous écrivez -4^2
et que votre résultat est -16 → c'est FAUX !
La bonne écriture est $(-4)^2$ et le bon résultat est 16

b) on veut calculer l'expression $3x^2$ pour $x = 2$

Si vous écrivez $3 \times 2^2 = 6^2 = 36$ → c'est FAUX !
Le bon calcul est $3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$.

Bilan avec une expression qui regroupe un peu tout

a) on veut calculer l'expression $4x^2 - 5(2x+9)$ pour $x = 10$

On obtient $4 \times 10^2 - 5 \times (2 \times 10 + 9) = 255$

b) on veut calculer l'expression $4x^2 - 5(2x+9)$ pour $x = -3$

On obtient $4 \times (-3)^2 - 5 \times (2 \times (-3) + 9) = 21$

Les règles pour développer une expression et la règle de suppression des parenthèses (rappels)

On va revoir sur cette fiche les principes de base du développement des expressions algébriques.
Si vous avez besoin de plus de détails et d'explications, il faut utiliser les liens proposés pour retrouver des fiches plus complètes.

Rappel avec la simple distributivité
On se retrouve avec *deux multiplications* à faire car on a juste un nombre devant chaque parenthèse.

On a : $3(2x+5) = 6x + 15$

$-2(3x-4) = -6x + 8$ → $-2\times(-4) = +8$

$4(2x+5) - 3(2x-1) = 8x + 20 - 6x + 3$ ← $-3\times(-1) = +3$

$= 2x + 23$

Rappel avec la double distributivité
On se retrouve avec *quatre multiplications* à faire car on a deux parenthèses l'une devant l'autre.

On a : $(3x+4)(5x+2) = 15x^2 + 6x + 20x + 8$

$= 15x^2 + 26x + 8$

On a : $(2x-3)(4x-5) = 8x^2 - 10x - 12x + 15$

$= 8x^2 - 22x + 15$

Rappel de la règle de suppression des parenthèses
Si il y a juste un + devant la parenthèse ou si c'est la parenthèse du début "*sans rien devant*", on peut enlever cette parenthèse ***SANS changer les signes*** des termes de la parenthèse.
Si il y a juste un - devant la parenthèse, on peut enlever cette parenthèse ***en changeant TOUS les signes*** des termes de la parenthèse.

On a : $8x + (7x-3) - (5x-1)$

$= 8x + \underbrace{7x-3}_{\text{aucun changement}} \underbrace{-5x+1}_{\text{on a changé CHAQUE signe}}$

$= 8x + 7x - 5x - 3 + 1 = 10x - 2$

On a : $(7x-1) - (3x+2) + (-2x+5)$

$= \underbrace{7x-1}_{\text{aucun changement}} \underbrace{-3x-2}_{\text{on a changé CHAQUE signe}} \underbrace{-2x+5}_{\text{aucun changement}}$

$= 7x - 3x - 2x - 1 - 2 + 5 = 2x + 2$

Comment développer une expression : exemples fondamentaux

On a, sur cette fiche, des exemples dans lesquels il faut ***développer***, ***supprimer*** des parenthèses et ***réduire*** les expressions. Du coup, quand vous appliquez une règle, il faut *oublier le reste du calcul* et vous devez vous *concentrer uniquement* sur la règle utilisée.
Le but est de ne pas se laisser "*envahir*" par l'ensemble du calcul, et de réussir à le traiter *petit à petit*.

Un exemple d'expression à développer

On va développer l'expression $A = -4(x-1) + (5x-3)(2x-6)$

On a : $-4(x-1) + (5x-3)(2x-6)$

$= \underbrace{-4x+4}_{\text{on a utilisé la simple distributivité}} + (\underbrace{10x^2-30x-6x+18}_{\text{on a appliqué la double distributivité en protégeant le résultat par des parenthèses}})$

$= -4x+4 + \underbrace{10x^2-30x-6x+18}_{\text{on a supprimé les parenthèses sans changement de signe}}$

$= 10x^2 \underbrace{-4x-30x-6x}\underbrace{+4+18}$

$= 10x^2 \quad -40x \quad +22$

Un autre exemple d'expression à développer

On va développer l'expression $B = (3x+1)(4x-5) - (2x-3)(x+6)$

On a : $(3x+1)(4x-5) - (2x-3)(x+6)$

on développe et on protège les résultats avec des parenthèses

$= (12x^2-15x+4x-5) - (2x^2+12x-3x-18)$

$= \underbrace{12x^2-15x+4x-5}_{\text{aucun changement de signe}} \quad \underbrace{-2x^2-12x+3x+18}_{\text{⚠ on a changé chaque signe}}$

$= \underbrace{12x^2-2x^2}\underbrace{-15x+4x-12x+3x}\underbrace{-5+18}$

$= 10x^2 \quad -20x \quad +13$

Comment montrer que deux expressions sont égales

On veut, par exemple, montrer qu'on a l'égalité $(x-1)(x+2) - (3x-1) = (x+1)(x-3)$.
Cette question est tirée du brevet 2019 (vous pourrez utiliser la méthode 3 et vous aider de mon corrigé).

L'erreur à ne pas faire

Le fait de remplacer x par un nombre pour vérifier que les résultats sont égaux pour les deux expressions ne suffit pas. Et même si vous remplacez x par un deuxième ou un troisième nombre ...
Des exemples ne peuvent suffire à montrer que l'égalité sera toujours vérifiée !

La méthode 1 : on part de l'expression A , que l'on transforme (en développant, en réduisant ...), et on vérifie que l'on arrive bien finalement à l'expression B.

Exemple : on montre l'égalité $3(x-5)^2 - 32 = 3x^2 - 30x + 43$

On part de $3\underbrace{(x-5)^2} - 32$ que l'on développe.
On obtient $3(x^2 - 10x + 25) - 32$
soit $3x^2 - 30x + \underbrace{75 - 32}$ (en développant par 3)
soit $3x^2 - 30x + 43 \rightarrow$ l'égalité est vérifiée !

La méthode 2 : on fait le chemin "*inverse*" en passant de l'expression B à l'expression A.

Exemple : on montre l'égalité $2x^2 + 24x + 51 = 2(x+6)^2 - 21$

On part de $2(x+6)^2 - 21$ que l'on développe.
On obtient $2(x^2 + 12x + 36) - 21$
soit $2x^2 + 24x + \underbrace{72 - 21}$ (en développant par 2)
soit $2x^2 + 24x + 51 \rightarrow$ l'égalité est vérifiée !

La méthode 3 : on prend l'expression A que l'on transforme (en la développant en général). On transforme ensuite l'expression B . Et on vérifie que l'on obtient le même résultat final pour les deux.

Exemple : a t'on l'égalité $(2x-6)(4-x) + 3x^2 + 46 = (x+5)^2 - (5-4x) + 2$?

On développe $(2x-6)(4-x) + 3x^2 + 46$
$= 8x - 2x^2 - 24 + 6x + 3x^2 + 46$
$= \underbrace{-2x^2 + 3x^2} \underbrace{+ 8x + 6x} \underbrace{- 24 + 46}$
$= x^2 + 14x + 22$

On développe $(x+5)^2 - (5-4x) + 2$
$= x^2 + 10x + 25 - 5 + 4x + 2$ ⚠
$= x^2 + 14x + 22$

Donc on a bien l'égalité car les résultats sont égaux.

Remarque : c'est avec un peu *d'expérience* (et donc de l'*entrainement*) que l'on voit quelle est la méthode qui permet, pour chaque situation, de faire les calculs les plus ***simples*** et les plus ***adaptés***.

Comment montrer que deux expressions ne sont pas égales

Montrer que deux expressions *ne sont pas égales* est beaucoup plus simple que de montrer qu'elles sont égales. En effet, il va suffire de trouver un contre exemple !

Le principe du contre exemple

On suppose que l'on veut montrer que deux expressions A et B ne sont pas égales.
→ on remplace x par un nombre dans l'expression A.
→ on remplace x par le **même nombre** dans l'expression B.
→ et si on trouve deux résultats différents, alors on peut conclure que les expressions A et B ne sont pas égales (car elles sont déjà différentes pour une valeur particulière de x).

On illustre ce principe

On considère deux expressions $A = (2x - 5)(8 - x) + 4x$ et $B = -2x^2 + 15x - 40$.
On nous demande de montrer que ces deux expressions ne sont pas égales.

Une méthode consisterait à développer l'expression A pour vérifier que l'on n'obtient pas l'expression B. Mais ce serait beaucoup plus long et source d'erreurs que l'utilisation d'un contre exemple.

On va remplacer x par 3 dans les deux expressions.

→ pour l'expression A, on obtient :

$$(2 \times 3 - 5) \times (8 - 3) + 4 \times 3 = 17$$

→ pour l'expression B, on obtient :

$$-2 \times 3^2 + 15 \times 3 - 40 = -13$$

DONC les résultats sont différents ($17 \neq -13$) et les expressions ne sont pas égales.

Une deuxième illustration de ce principe

On considère deux expressions $A = 4x^2 + 5x - 17$ et $B = (3x - 5)(1 + 2x) - (2x - 3)(x - 4)$.
On nous demande de montrer que ces deux expressions ne sont pas égales.

Une méthode consisterait à développer l'expression A pour vérifier que l'on n'obtient pas l'expression B. Mais ce serait beaucoup plus long et source d'erreurs que l'utilisation d'un contre exemple.

On va remplacer x par 5 dans les deux expressions.

→ pour l'expression A, on obtient :

$$4 \times 5^2 + 5 \times 5 - 17 = 108$$

→ pour l'expression B, on obtient :

$$(3 \times 5 - 5) \times (1 + 2 \times 5) - (2 \times 5 - 3) \times (5 - 4) = 103$$

DONC les résultats sont différents ($108 \neq 103$) et les expressions ne sont pas égales.

Les programmes de calculs

Un *programme de calcul*, c'est une suite d'instructions qu'il faut suivre dans l'ordre, avec méthode.
On parle aussi d'*algorithme*. Et on les croise souvent dans les exercices utilisant *Scratch* ou un *tableur*.

Pour bien étudier un *programme de calcul*, je vous conseille de :

- mettre en place sur votre feuille ce *programme de calcul* en prenant un exemple numérique.
  Vous prenez un nombre "*facile*" et vous écrivez les étapes de calculs qui vont amener au résulat final.
- une fois cet exemple fait, vous partez de la lettre "x" et vous suivez les **mêmes étapes** que l'exemple numérique sauf qu'il s'agira cette fois de bien respecter toutes les règles du calcul littéral.

Un exemple de programme de calcul (d'après Brevet 2019)

Choisir un nombre Le multiplier par 3 Ajouter 1

On part du nombre 2 et on obtient :

$$2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{+1} 7$$

On part de "x" et on obtient :

$$x \xrightarrow{\times 3} 3x \xrightarrow{+1} 3x+1$$

L'expression de ce programme est donc : $3x+1$.

Un autre exemple (d'après brevet 2019)

Choisir un nombre Soustraire 1 Multiplier le résultat par 2 Ajouter 3

On part du nombre 5 et on obtient :

$$5 \xrightarrow{-1} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{+3} 11$$

On part de "x" et on obtient :

$$x \xrightarrow{-1} x-1 \xrightarrow{\times 2} 2\times(x-1) \xrightarrow{+3} 2(x-1)+3$$

ne pas oublier les parenthèses

On peut développer $2(x-1)+3 = 2x-2+3 = 2x+1$

L'expression de ce programme est donc : $2(x-1)+3$

ou $2x+1$.

Comment montrer que des programmes de calculs sont égaux

Le problème à résoudre

On veut montrer que deux *programmes de calculs* sont égaux et donneront toujours le même résultat.

Programme A	***Programme B***
- Choisir un nombre - Le mettre au carré - Ajouter 1	- Choisir un nombre - Ajouter 1 - Elever le résultat au carré - Soustraire le double du nombre de départ

Le principe à suivre

Si ces programmes de calculs n'étaient pas égaux, il suffirait de trouver un ***contre exemple****, c'est à dire un nombre pour lequel on appliquerait les deux programmes de calculs et qui ne donneraient pas le même résultat final.*

Pour montrer que les deux programmes sont égaux, **un simple exemple numérique ne suffit pas.**
Il faudra forcément faire le travail en partant de la lettre " x ", même si le fait de commencer par un exemple numérique est préconisé afin de bien mettre en place ces programmes.

On peut commencer par un exemple numérique

On peut mettre en place les programmes en partant du même nombre de départ (on prend 3 par exemple).

Avec le programme A :

on part de $3 \xrightarrow{(\ )^2} 9 \xrightarrow{+1} 10$

Avec le programme B :

on soustrait le double de 3 !

on part de $3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{(\ )^2} 16 \xrightarrow{-6} 10$

On doit finir en travaillant avec la lettre " x "

C'est la seule façon de généraliser le travail et d'être sûr de l'égalité des deux programmes.

Avec le programme A :

on part de $x \xrightarrow{(\ )^2} x^2 \xrightarrow{+1} x^2+1$

L'expression de ce programme est donc : x^2+1.

Avec le programme B :

on soustrait le double de x

on part de $x \xrightarrow{+1} x+1 \xrightarrow{(\ )^2} (x+1)^2 \xrightarrow{-2x} (x+1)^2-2x$

et on développe $(x+1)^2-2x = x^2+2x+1-2x = x^2+1$

L'expression de ce programme est donc aussi x^2+1.

CONCLUSION
On obtient bien les mêmes expressions finales en partant de la lettre x.
Les deux programmes de calculs sont donc bien égaux.

Comment factoriser une expression : le principe général

Le principe de base

On va utiliser une phrase qui illustre bien ce principe : ***Factoriser, c'est l'inverse de dévélopper***

Cela signifie que si on passe de $3(2x+5)$ à $6x+15$, alors on ***développe*** l'expression.
et si on fait le chemin "*inverse*" en passant de $6x+15$ à $3(2x+5)$, alors on ***factorise***.

Du coup, $6x+15$ s'appelle l'expression ***développée*** et $3(2x+5)$ s'appelle l'expression ***factorisée***.

La méthode générale

On va chercher ce qu'on appelle un ***facteur commun*** (que l'on va entourer ici pour bien le voir).
Ce ***facteur commun*** doit être lié à une multiplication dans l'ensemble de tous les termes de l'expression.
Une fois que l'on a trouvé ce ***facteur commun***, il faudra le placer devant une parenthèse.
Et on finira le travail en complètant la parenthèse avec "*ce qui reste*" (donc ce que l'on n'a pas entouré).

La factorisation par un nombre

Exemple 1 : on factorise l'expression $6x+15$ → on reconnait des multiples de 3

On a $6x+15 = 3\times 2x + 3\times 5$

$= 3\times \underbrace{(2x+5)}_{\text{parenthèse complétée avec ce qui "reste"}}$

Facteur commun placée devant la parenthèse

Exemple 2 : on factorise l'expression $14x-21$ → on reconnait des multiples de 7

On a $14x-21 = 7\times 2x - 7\times 3$

$= 7\times(2x-3)$

La factorisation par une lettre

Exemple 1 : on factorise l'expression $5x^2+7x$ → le facteur commun sera "x".

On a $5x^2+7x = 5x\times x + 7\times x$

$= x\times(5x+7)$

Exemple 2 : on factorise l'expression $11x^2-8x$ → le facteur commun sera "x"

On a $11x^2-8x = 11x\times x - 8\times x$

$= x\times(11x-8)$

Remarque : *on peut vérifier son travail en développant l'expression (factorisée) obtenue. On doit retomber sur l'expression (développée) initiale.*

Comment factoriser une expression par une parenthèse

Une fois que l'on maitrise les factorisations basiques (par un nombre, par une lettre), on peut passer à des factorisations plus ambitieuses : celles pour lesquelles le facteur commun sera une parenthèse.

La méthode générale

Cela commence à devenir plus technique. Le facteur commun sera donc une expression entre parenthèses. Il faut donc bien la repérer dans chaque partie de l'expression générale.

Exemple 1 : on veut factoriser l'expression $(3x+5)(2x+4) + (6x+1)(3x+5)$

→ le facteur commun est la parenthèse $(3x+5)$

On a $(3x+5)(2x+4)+(6x+1)(3x+5)$

$= (3x+5)\big(\underbrace{(2x+4)+(6x+1)}\big)$

voilà ce qui "reste" !

On met des "grandes" parenthèses dans lesquelles on met les "petites" parenthèses (c'est à dire celles qui restent et qui n'ont donc pas été entourées au départ).
Il nous restera alors à réduire l'expression (suppression des parenthèses , réduction) .

On obtient $(3x+5)(2x+4+6x+1)$

$= (3x+5)(8x+5)$

Exemple 2 : on veut factoriser l'expression $(5x-4)^2 - (5x-4)(2x-1)$

Il faut se souvenir ici que la parenthèse au carré $(5x-4)^2$ correspond à $(5x-4) \times (5x-4)$

→ le facteur commun est la parenthèse $(5x-4)$

On a $(5x-4)(5x-4)-(5x-4)(2x-1)$

$= (5x-4)\big(\underbrace{(5x-4)-(2x-1)}\big)$

voilà ce qui "reste" !

On met des "grandes" parenthèses dans lesquelles on met les "petites" parenthèses (c'est à dire celles qui restent et qui n'ont donc pas été entourées au départ).
Il nous restera alors à réduire l'expression (suppression des parenthèses , réduction) .

On obtient $(5x-4)(5x-4-2x+1)$ ⚠ on change les signes !

$= (5x-4)(3x-3)$

Comment factoriser une expression : parenthèses et identité remarquable

On va voir ici la dernière possibilité de factorisation à maitriser et elle n'est pas facile du tout.
On peut considérer qu'on est au niveau d'une classe de 2nde. Bravo si vous le maitrisez déjà en 3e !!

L'expression à factoriser

Le but est de factoriser une expression du type $(8x+6)^2 - (5x+2)^2$.
On doit remarquer qu'il n'y a pas de facteur commun sur ce type d'expression.
La dernière (et la seule) possibilité sera ici d'utiliser l'identité remarquable IR3 qui nous donne $a^2 - b^2$.

La méthode générale

Une fois que l'on reconnait $a^2 - b^2$, il faut se souvenir que cela provient de l'expression $(a+b)(a-b)$.

Exemple 1 : on veut factoriser l'expression $(8x+6)^2 - (5x+2)^2$
→ *on reconnait l'identité remarquable $a^2 - b^2$*
avec " 8x + 6" qui remplacera " a " et " 5x + 2" qui remplacera " b ".

On a $(\underbrace{8x+6}_{a})^2 - (\underbrace{5x+2}_{b})^2$

$= \big(\underbrace{(8x+6)}_{a} + \underbrace{(5x+2)}_{b}\big)\big(\underbrace{(8x+6)}_{a} - \underbrace{(5x+2)}_{b}\big)$

On met des "grandes" parenthèses dans lesquelles on met les "petites" parenthèses (c'est à dire celles qui correspondent aux expressions qui prennent la place de " a " et de " b ").
Il nous restera alors à réduire l'expression (suppression des parenthèses, réduction). ⚠ on change les signes

on obtient $(8x+6+5x+2)(8x+6-5x-2)$

$= (13x+8)(3x+4)$

Exemple 2 : on veut factoriser l'expression $(9x-4)^2 - (6x-1)^2$
→ *on reconnait l'identité remarquable $a^2 - b^2$*
avec " 9x - 4" qui remplacera " a " et " 6x - 1" qui remplacera " b ".

On a $(\underbrace{9x-4}_{a})^2 - (\underbrace{6x-1}_{b})^2$

$= \big(\underbrace{(9x-4)}_{a} + \underbrace{(6x-1)}_{b}\big)\big(\underbrace{(9x-4)}_{a} - \underbrace{(6x-1)}_{b}\big)$

On met des "grandes" parenthèses dans lesquelles on met les "petites" parenthèses (c'est à dire celles qui correspondent aux expressions qui prennent la place de " a " et de " b ").
Il nous restera alors à réduire l'expression (suppression des parenthèses, réduction). ⚠ on change les signes

On obtient $(9x-4+6x-1)(9x-4-6x+1)$

$= (15x-5)(3x-3)$