La définition d'une fonction linéaire

On va considérer comme acquis le chapitre initial de cette année sur la "*notion de fonctions*".
Si nécessaire, vous devez le reprendre pour être bien à l'aise avec le vocabulaire (antécédent , image ...) et les différentes formes étudiées (expression algébrique , tableau de valeurs , représentation graphique ...).
Le but est, maintenant, de classer les fonctions par catégories, afin d'avoir des propriétés communes.
Et la deuxième catégorie étudiée cette année sera l'ensemble des "***fonctions linéaires***".

Définition d'une fonction linéaire

Toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = a\ x$ (avec a qui est un nombres positif ou négatif) s'appellera une *fonction linéaire*.
Le nombre a s'appelle le ***coefficient*** de la fonction linéaire (c'est le nombre qui multiplie la variable x).
Je vous conseille de prendre l'habitude de bien noter la valeur de a sur votre feuille.

Exemples : on va dire à chaque fois si, OUI ou NON, les fonctions proposées sont des fonctions linéaires.
Si c'est bien le cas, on donnera bien la valeur de a .

$f(x) = 3x$ → Oui avec $a = 3$

$f(x) = -4x$ → Oui avec $a = -4$

$f(x) = x$ → Oui avec $a = 1$ (car $x = 1x$)

$f(x) = -x$ → Oui avec $a = -1$ (car $-x = -1x$)

$f(x) = \dfrac{4}{x}$ → NON à cause du x au dénominateur

$f(x) = 4x^2$ → NON à cause du carré (x^2)

$f(x) = 2x + 3$ → NON car c'est une fonction affine

Une fonction linéaire, c'est "un peu comme" une fonction affine pour laquelle on aurait $b = 0$.

Lien des fonctions linéaires avec les programmes de calculs

Un exemple avec le programme ci-dessous, pour voir ce lien qui est assez évident :

- choisir un nombre
- multiplier ce nombre par 5

On part de x et on a : $x \xrightarrow{\times 5} 5x$

On obtient une fonction linéaire définie par $f(x) = 5x$

Un autre exemple avec le programme ci-dessous :

- choisir un nombre
- multiplier ce nombre par - 3

On part de x et on a : $x \xrightarrow{\times(-3)} -3x$

On obtient une fonction linéaire définie par $f(x) = -3x$

Comment calculer ou lire une image avec une fonction linéaire

Pour ceux qui ont déjà bien compris la notion d'image cette année, cette fiche sera surtout une révision.
Pour les autres, le fait de l'adapter à une catégorie de fonctions devrait vous aider à tout comprendre.

Comment calculer l'image d'un nombre par une fonction linéaire

C'est en fait comme pour toutes les fonctions dont on connait l'expression algébrique avec x .

L'*image* par une fonction, c'est le nombre d'arrivée, c'est le résultat obtenu, donc il suffit de remplacer la lettre x par le nombre de départ (donné par la consigne) et on effectue le calcul.

Il faudra juste se souvenir que la question peut être formulée de plusieurs façons différentes mais que c'est bien ici toujours un calcul d'image qui sera demandée.

Exemples :

a) avec la fonction f définie par $f(x) = 4x$, calculer l'image du nombre 2.

On remplace x par 2 → on calcule $4 \times 2 = 8$
Donc l'image de 2 est égale à 8.

b) avec la fonction g définie par $g(x) = -5x$, calculer $g(3)$.

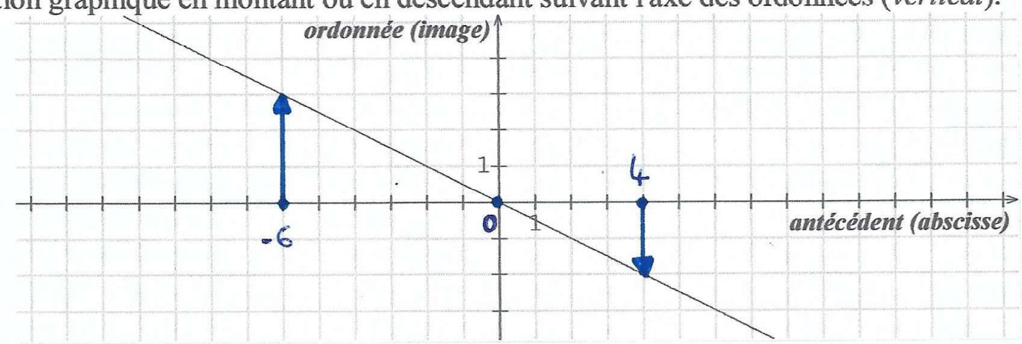
On remplace x par 3 → on cherche bien l'image de 3
On obtient $g(3) = -5 \times 3 = -15$ c'est l'image de 3 !

c) avec la fonction h définie par $h(x) = 3x$, compléter l'égalité $h(6) = ...$

On remplace x par 6 → on cherche bien l'image de 6
On obtient $h(6) = 3 \times 6 = 18$ c'est l'image de 6 !

Image d'un nombre avec la représentation graphique

Comme dans le cadre général, on part de l'axe des abscisses (*horizontal*) et on lit l'image en rejoignant la représentation graphique en montant ou en descendant suivant l'axe des ordonnées (*vertical*).



l'image de −6 est 3 (on monte de 3)
l'image de 0 est 0 (on ne "bouge" pas)
l'image de 4 est −2 (on descend de −2)

Fonction linéaire et proportionnalité

...Et c'est là que l'on va voir que d'anciennes notions (ici, la *proportionnalité*) sont parfaitement liées à des notions nouvelles (ici, les fonctions *linéaires*). C'est une chose tellement fréquente en mathématiques !

On passe d'une fonction linéaire à un tableau de proportionnalité

On va prendre l'exemple d'une fonction *linéaire* de coefficient 5.
Cette fonction *linéaire* peut donc s'écrire avec $f(x) = 5x$.
On rappelle que, pour remplir un tableau de valeurs, il suffit de remplacer x par les différentes valeurs de la première ligne de ce tableau afin de calculer leur image respective.

On obtient le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	6
$f(x) = 5x$	5	10	15	20	25	30

$\boxed{5 \times 1}$ $\boxed{5 \times 2}$ $\boxed{5 \times 3}$ $\boxed{5 \times 4}$ $\boxed{5 \times 5}$ $\boxed{5 \times 6}$

Conclusion :
Les valeurs du tableau sont forcément *proportionnelles* puisque l'on passe de la première ligne à la deuxième ligne en multipliant toujours par le même nombre 5.
→ on a donc un *tableau de proportionnalité* de coefficient 5.

On passe d'un tableau de proportionnalité à une fonction linéaire

On va partir cette fois d'un tableau de valeurs

x	1	2	10	20
y	3	6	30	60

On vérifie sans souci que que l'on a bien un tableau de proportionnalité de coefficient 3.
On divise les nombres de la 2e ligne par ceux de la 1ere ligne.

On obtient $3 : 1 = 3$; $6 : 2 = 3$

$30 : 10 = 3$; $60 : 20 = 3$

→ les résultats sont bien tous les mêmes.

→ on a bien un *tableau de proportionnalité* de coefficient 3.
Ce tableau peut alors représenter le tableau de valeurs de la fonction *linéaire* définie par $f(x) = 3x$.

Propriétés

Toute *situation de proportionnalité* peut être représentée par une *fonction linéaire*.

Et, inversement, toute *fonction linéaire* correspondra à une *situation de proportionnalité*.

Comment calculer ou lire un antécedent avec une fonction linéaire

Pour ceux qui ont déjà bien compris la notion d'antécédent, cette fiche sera surtout une révision. Pour les autres, le fait de l'adapter à une catégorie de fonctions devrait vous aider à tout comprendre.

Comment calculer l'antécédent d'un nombre par une fonction linéaire

L'*antécédent* par une fonction, cela reste bien le nombre de départ, celui dont on est parti.

Il faut donc ***retrouver*** la valeur de x qui nous permet d'avoir le résultat demandé : il faut donc ***résoudre une équation***, ce qui revient pour une fonction linéaire à tout simplement diviser l'image par le coefficient de la fonction.

Exemples :

a) avec la fonction f définie par $f(x) = 3x$, calculer l'antécédent de 18.

On résout l'équation $3x = 18$

$x = 18 : 3 = 6$

L'antécédent de 18 est égal à 6.

b) avec la fonction g définie par $g(x) = -2x$, calculer l'antécédent de 10.

On résout l'équation $-2x = 10$

$x = 10 : (-2) = -5$

L'antécédent de 10 est égal à -5.

c) avec la fonction h définie par $h(x) = 4x$, compléter l'égalité h (......) = - 12

On cherche bien la valeur de x, soit un antécédent.

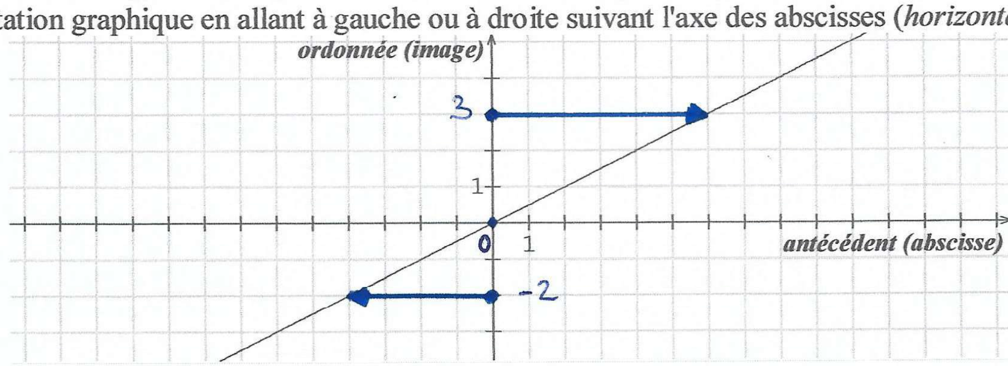
Donc on résout l'équation $4x = -12$

$x = -12 : 4 = -3$

L'antécédent de -12 est égal à -3 → $h(-3) = -12$

Antécédent d'un nombre avec la représentation graphique

Comme dans le cadre général, on part de l'axe des ordonnées (*vertical*) et on lit l'antécédent en rejoignant la représentation graphique en allant à gauche ou à droite suivant l'axe des abscisses (*horizontal*).



L'antécédent de -2 est -4 (on va vers la gauche de -4)

L'antécédent de 0 est 0 (on ne "bouge" pas)

L'antécédent de 3 est 6 (on va vers la droite de 6)

Représentation graphique d'une fonction linéaire : les propriétés

On va traiter deux exemples sur cette fiche, et on va accepter le fait de généraliser les résultats obtenus afin de les transformer en règles générales sur la représentation graphique des fonctions linéaires.

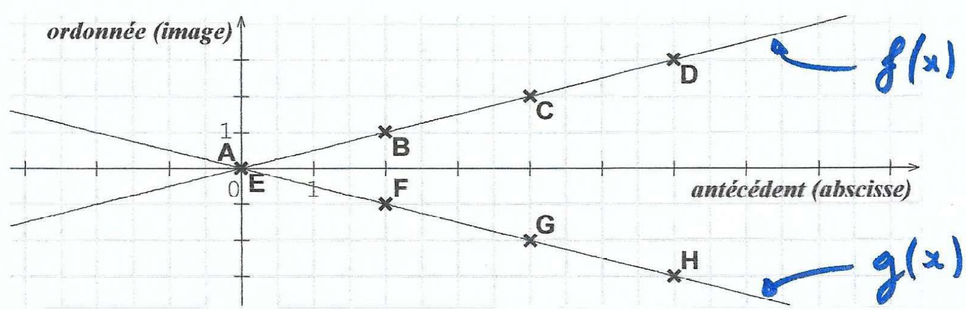
Tableaux de valeurs et lien avec les coordonnées

Pour obtenir le tableau de valeurs des *fonctions linéaires* définies par $f(x) = 0{,}5\,x$ et $g(x) = -\,0{,}5\,x$, il suffit de calculer les images des nombres de la première ligne de chaque tableau.

x	0	2	4	6
$f(x) = 0{,}5x$	$0{,}5 \times 0 = 0$	$0{,}5 \times 2 = 1$	$0{,}5 \times 4 = 2$	$0{,}5 \times 6 = 3$
points du graphique	A(0 ; 0)	B(2 ; 1)	C(4 ; 2)	D(6 ; 3)

x	0	2	4	6
$g(x) = -\,0{,}5x$	$-0{,}5 \times 0 = 0$	$-0{,}5 \times 2 = -1$	$-0{,}5 \times 4 = -2$	$-0{,}5 \times 6 = -3$
points du graphique	E(0 ; 0)	F(2 ; −1)	G(4 ; −2)	H(6 ; −3)

On place tous ces points dans un repère et en reliant les points A, B, C et D qui concerne la fonction f, on constate que ces points sont ***alignés*** : ils sont sur ***une même droite*** ***qui passe par l'origine du repère***.
De même, en reliant les points E, F, G et H qui concerne la fonction g, on constate que ces points sont également ***alignés*** : ils sont sur ***une même droite*** ***qui passe elle aussi par l'origine du repère***.



Conséquences et propriétés fondamentales

Dans un repère, la représentation graphique d'une ***fonction linéaire*** sera toujours ***une droite*** ***qui passera par l'origine du repère***.

Inversement, toute ***droite*** ***passant par l'origine du repère*** peut être considérée comme la représentation graphique d'une ***fonction linéaire***.

Il n'y aura donc finalement que *deux catégories de droites possibles* pour les fonctions linéaires :

Les droites qui "***montent***" (en regardant le graphique de gauche à droite), comme ici pour la fonction f.
Cela concerne les fonctions linéaires dont le coefficient a est ***positif*** (pour f, il est égal à 0,5).
On dira dans ce cas que la fonction f est ***croissante***.

Les droites qui "***descendent***" (en regardant toujours de gauche à droite), comme ici pour la fonction g.
Cela concerne les fonctions linéaires dont le coefficient a est ***négatif*** (pour g, il est égal à – 0, 5).
On dira dans ce cas que la fonction g est ***décroissante***.

Remarque

On a une cohérence avec une propriété (vue en 4e) qui donne une équivalence entre les situations de proportionnalité (soit des fonctions linéaires) et des droites passant par l'origine d'un repère.

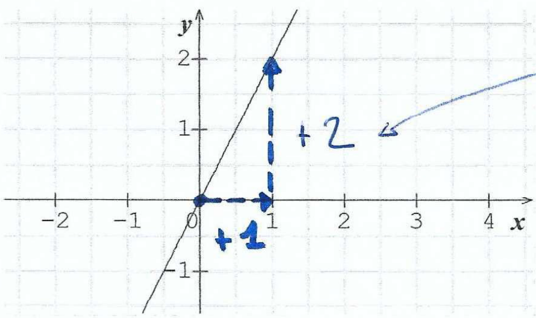
Le coefficient (directeur) d'une fonction linéaire

Avant d'apprendre, plus tard, à le calculer, on va dans un premier temps apprendre à ***déterminer ce coefficient à l'aide d'un travail graphique*** sur la droite représentant la fonction linéaire.

La méthode

Ce ***coefficient*** correspond au nombre a défini dans toute fonction linéaire du type ax .
On va voir ici une méthode de base qui sera suffisante dans une très grande majorité des situations.

1) on se place sur un point de la droite bien défini par les carreaux (ne pas se placer "entre les carreaux").
2) on se décale de + 1 (soit de "une unité") sur les abscisses en horizontale.
3) on rejoint la droite de la fonction linéaire, soit en montant (coefficient positif), soit en descendant (coefficient négatif) → le coefficient est égal à ce dernier nombre.

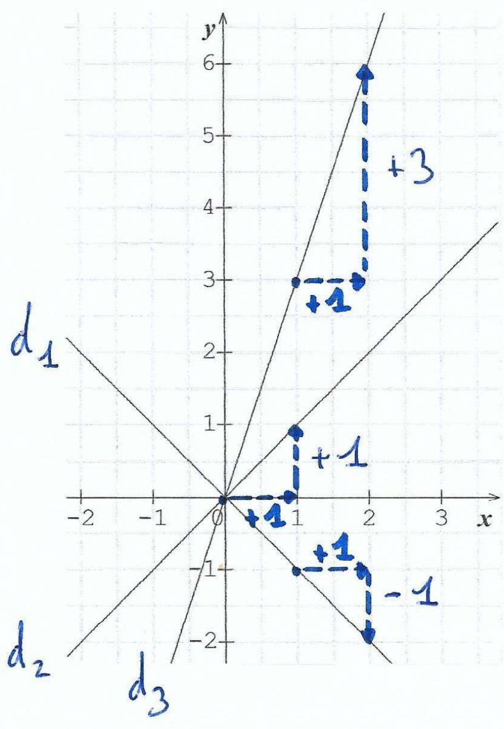


Le coefficient se lit ici.
Il est positif car il a fallu monter pour rejoindre la droite
→ le coefficient est égal à 2.

__Astuce__ : on partira autant que possible de l'origine puisque la droite d'une fonction linéaire "passe toujours par l'origine". Mais on verra que l'on peut partir d'un autre point de la droite.

Application

Donner le coefficient (directeur) de chacune des droites suivantes qui représentent des fonctions linéaires.



pour d_2, le coefficient est égal à 1.

pour d_1 et d_3, on peut partir d'un autre point que l'origine
→ la méthode reste inchangée
→ pour d_1, le coefficient est égal à −1.
pour d_3, le coefficient est égal à 3.

Comment tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire : la méthode générale

Vous pourrez être amené à croiser différentes méthodes pour tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire. N'oubliez pas de choisir UNE de ces méthodes comme "*méthode refuge*". Ce sera celle que l'on sait pouvoir toujours réussir.
Ainsi, je vais faire le choix d'une méthode basique sur cette fiche qui pourra être cette "*méthode refuge*".

La méthode pour obtenir la représentation graphique d'une fonction linéaire

Le principe de base est très simple.

Puisque la représentation graphique d'une *fonction linéaire* est une *droite*, il suffit de placer ***deux points*** dans le repère et, ensuite, on trace la droite qui passe par ces deux points.

La méthode peut alors se décrire de la façon suivante.

On doit donc obtenir **deux points de la droite** pour pouvoir la tracer.
Il faudra donc faire un **tableau de valeurs** en remplaçant x par deux nombres, puis en calculant les images respectives de ces deux nombres.
On obtient alors les **coordonnées de 2 points**, et il suffira de les relier pour obtenir la droite !

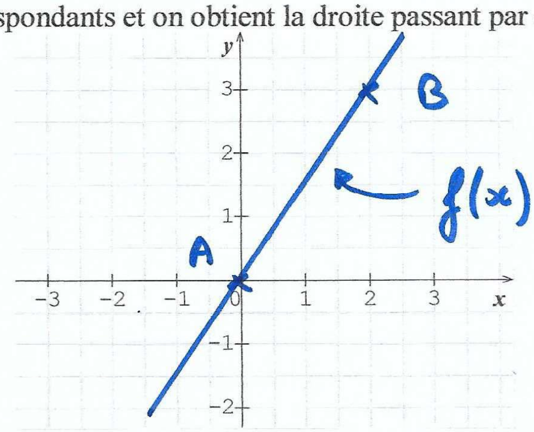
Le cas particulier des fonctions linéaires (par rapport aux fonctions affines) est que la droite passe forcément par l'origine et, donc, cette origine pourra constituer le premier de ces deux points !!

Un exemple avec $f(x) = 1{,}5\,x$ $\rightarrow$ on décide de remplacer x par 0 , puis x par 2.

x	0	2
$f(x)$	$1{,}5 \times 0 = 0$	$1{,}5 \times 2 = 3$
points du graphique	$A(0\,;0)$	$B(2\,;3)$

ce point correspond à l'ORIGINE

On place les deux points correspondants et on obtient la droite passant par ces deux points.



On peut alors vérifier que la droite "monte" ce qui correspond bien à un coefficient 1,5 qui est ***positif****.*

Comment savoir par quels nombres on va remplacer x ?

Il faudra juste bien comprendre que c'est vous qui choisissez les valeurs de x !!
Vous faites comme vous voulez tant que... tant que les points rentrent dans votre graphique et que les valeurs ne sont pas approximatives (il faut privilégier les nombres entiers, bien sûr).
De plus, avec le cas particulier des fonctions linéaires, on peut utiliser l'origine comme premier point .
$\rightarrow$ Donc, vous pouvez démarrer avec l'idée de toujours remplacer x par 0 , puis x par 2.
Et puis, vous apprendrez, avec l'expérience, à adapter vos valeurs aux situations rencontrées.....

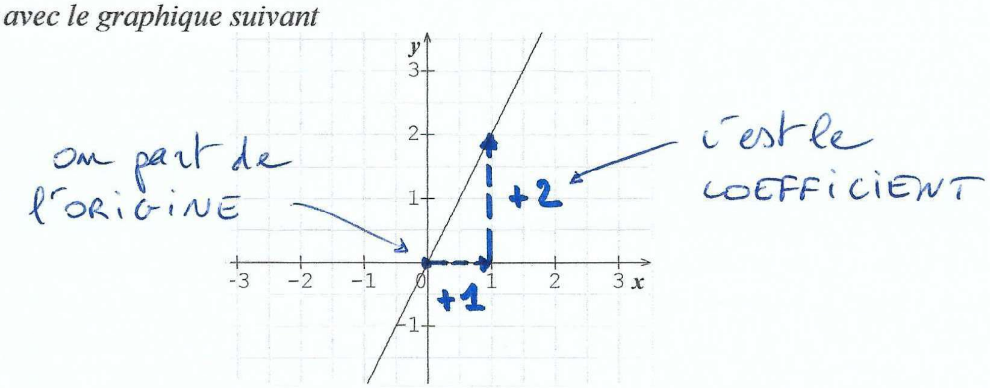
Comment retrouver l'expression d'une fonction linéaire avec son coefficient

La situation

Le but est ici de retrouver la valeur de a de l'expression $a\,x$.
Il faudra que la droite représentant la fonction linéaire soit donnée avec la possibilité de lire graphiquement **"sans aucun doute"** son *origine* et son *coefficient*.
C'est la situation basique à parfaitement maitriser en classe de troisième.

Méthode

On va travailler avec le graphique suivant



On détermine le nombre a , c'est à dire le coefficient (directeur) de la droite

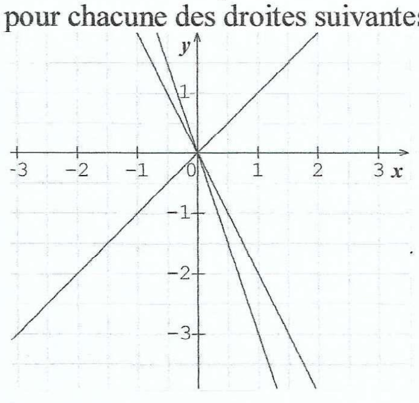
Le coefficient est égal à 2.

Conclusion :

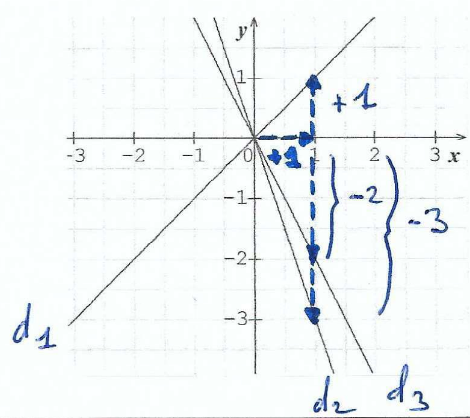
On obtient $f(x) = \underset{a}{2}x$

Application

Le but est de retrouver l'expression des fonctions linéaires pour chacune des droites suivantes.



Solutions (avec des indications graphiques) :



pour $d_1 \rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = 1x = x$

pour $d_2 \rightarrow a = -2 \rightarrow f(x) = -2x$

pour $d_3 \rightarrow a = -3 \rightarrow f(x) = -3x$

Comment retrouver l'expression d'une fonction linéaire à l'aide d'un point de la droite

Le but est juste de retrouver la valeur de a de l'expression $a\,x$.

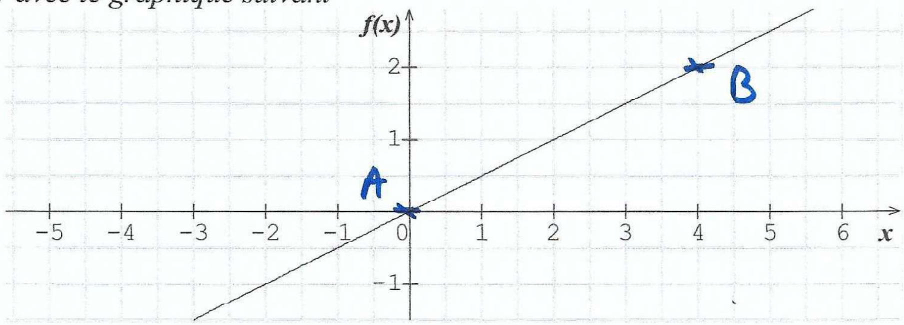
Comment bien retranscrire les énoncés

Que l'énoncé nous donne, pour une fonction linéaire, *un point avec ses coordonnées* (ici $A(4\,;2)$) ou *un nombre avec son image* (ici $f(4) = 2$), c'est en fait la même chose et la méthode suivante pourra s'appliquer de la même façon.

Méthode

Elle est beaucoup plus rapide que pour les fonctions affines car il n'y a que le calcul du coefficient a .

On va travailler avec le graphique suivant



Etape préliminaire : on trouve un point sur ce graphique

On notera l'origine A(0;0) et on prendra B(4;2)

Et on calcule le coefficient a

La formule générale pour calculer ce coefficient est : $a = \dfrac{f(Xb) - f(Xa)}{Xb - Xa} = \dfrac{Yb - Ya}{Xb - Xa}$

→ on doit TOUJOURS écrire les abscisses x en BAS

→ l'ordre des lettres A et B doit être le même en haut et en bas.

→ on adaptera cette formule quand on travaillera avec d'autres lettres que A et B !

On calcule : $a = \dfrac{\overset{y_B}{2} - \overset{y_A}{0}}{\underset{x_B}{4} - \underset{x_A}{0}} = \dfrac{2}{4} = 0,5$

Conclusion :

On obtient $a = 0,5 \rightarrow f(x) = \underbrace{0,5}_{a}x$

Remarque

a) On ferait exactement le même raisonnement si la consigne était la suivante :

" Quelle est la fonction linéaire f vérifiant l'égalité $f(4) = 2$? "

b) On peut vérifier, ou on aurait pu trouver très rapidement ce coefficient égal à 0,5 car il est évident que $4 \times 0,5 = 2$. Mais je vous conseille d'utiliser un certain nombre de fois la formule générale avant de vouloir aller "trop" vite.