La définition d'une fonction affine

On va considérer comme acquis le chapitre initial de cette année sur la "*notion de fonctions*".
Si nécessaire, vous devez le reprendre pour être bien à l'aise avec le vocabulaire (antécédent , image ...) et les différentes formes étudiées (expression algébrique , tableau de valeurs , représentation graphique ...).
Le but est, maintenant, de classer les fonctions par catégories, afin d'avoir des propriétés communes.
Et la première catégorie étudiée cette année sera l'ensemble des "***fonctions affines***".

Définition d'une fonction affine

Toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = a\ x + b$ (avec a et b qui sont des nombres positifs ou négatifs) s'appellera une *fonction affine*.
Le nombre a s'appelle le ***coefficient*** de la fonction affine (c'est le nombre qui multiplie la variable x).
Le nombre b s'appelle l'***ordonnée à l'origine*** (on verra plus tard ce que cela signifie vraiment)
Je vous conseille de prendre l'habitude de bien noter la valeur de a et de b sur votre feuille.

Exemples : on va dire à chaque fois si, OUI ou NON, les fonctions proposées sont des fonctions affines.
Si c'est bien le cas, on donnera bien la valeur de a et la valeur de b.

$f(x) = 3x - 4$ → OUI avec $a = 3$ et $b = -4$

$f(x) = -4x + 1$ → oui avec $a = -4$ et $b = 1$

$f(x) = x + 3$ → oui avec $a = 1$ et $b = 3$ (car $x = 1x$)

$f(x) = -x + 6$ → oui avec $a = -1$ et $b = 6$ (car $-x = -1x$)

$f(x) = \dfrac{4}{x} + 7$ → NON à cause du x au dénominateur

$f(x) = 4x^2 + 7$ → NON à cause du carré (x^2)

Lien des fonctions affines avec les programmes de calculs

Un exemple avec le programme ci-dessous, pour voir ce lien qui est assez évident :

- choisir un nombre
- multiplier ce nombre par 5
- soustraire 3 au résultat

On part de x et on a : $x \xrightarrow{\times 5} 5x \xrightarrow{-3} 5x - 3$
On obtient une fonction affine définie par $f(x) = 5x - 3$.

Un autre exemple avec le programme ci-dessous :

- choisir un nombre
- multiplier ce nombre par - 3
- ajouter 4 au résultat

On part de x et on a : $x \xrightarrow{\times(-3)} -3x \xrightarrow{+4} -3x + 4$
On obtient une fonction affine définie par $f(x) = -3x + 4$.

Comment calculer ou lire une image avec une fonction affine

Pour ceux qui ont déjà bien compris la notion d'image cette année, cette fiche sera surtout une révision. Pour les autres, le fait de l'adapter à une catégorie de fonctions devrait vous aider à tout comprendre.

Comment calculer l'image d'un nombre par une fonction affine

C'est en fait comme pour toutes les fonctions dont on connait l'expression algébrique avec x .

L'*image* par une fonction, c'est le nombre d'arrivée, c'est le résultat obtenu, donc il suffit de remplacer la lettre x par le nombre de départ (donné par la consigne) et on effectue le calcul.

Il faudra juste se souvenir que la question peut être formulée de plusieurs façons différentes mais que c'est bien ici toujours un calcul d'image qui sera demandée.

Exemples :

a) avec la fonction f définie par $f(x) = 3x + 4$, calculer l'image du nombre 2.

On remplace x par 2 → on calcule $3 \times 2 + 4 = 10$

Donc l'image de 2 est égale à 10.

b) avec la fonction g définie par $g(x) = -4x - 1$, calculer $g(5)$.

On remplace x par 5 → on cherche bien l'image de 5

On obtient $g(5) = -4 \times 5 - 1 = -21$ c'est l'image de 5 !

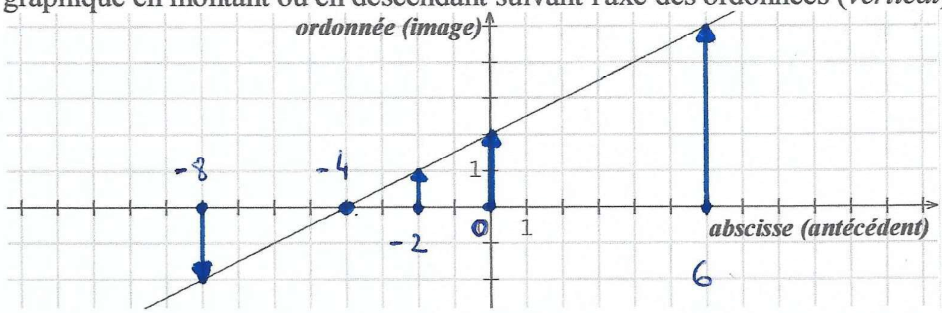
c) avec la fonction h définie par $h(x) = 5x - 2$, compléter l'égalité $h(4) =$ ......

On remplace x par 4 → on cherche bien l'image de 4

On obtient $h(4) = 5 \times 4 - 2 = 18$ c'est l'image de 4 !

Image d'un nombre avec la représentation graphique

Comme dans le cadre général, on part de l'axe des abscisses (*horizontal*) et on lit l'image en rejoignant la représentation graphique en montant ou en descendant suivant l'axe des ordonnées (*vertical*).



L'image de −8 est −2 (on descend de −2)

L'image de −4 est 0 (on ne "bouge" pas)

L'image de −2 est 1

L'image de 0 est 2

L'image de 6 est 5 (on monte de 5)

Comment calculer ou lire un antécédent avec une fonction affine

Pour ceux qui ont déjà bien compris la notion d'antécédent, cette fiche sera surtout une révision. Pour les autres, le fait de l'adapter à une catégorie de fonctions devrait vous aider à tout comprendre.

Comment calculer l'antécédent d'un nombre par une fonction affine

L'*antécédent* par une fonction, cela reste bien le nombre de départ, celui dont on est parti.

Il faut donc ***retrouver*** la valeur de x qui nous permet d'avoir le résultat demandé : il faut donc ***résoudre une équation***.

Exemples :

a) avec la fonction f définie par $f(x) = 3x + 4$, calculer l'antécédent de 19.

On résout l'équation $3x + 4 = 19$

$3x = 15$

$x = 15 : 3 = 5$

L'antécédent de 19 est égal à 5.

b) avec la fonction g définie par $g(x) = -4x + 3$, compléter l'égalité $g(\ ......\ ) = 11$

On cherche bien la valeur de x, soit un antécédent.

Donc on résout l'équation $-4x + 3 = 11$

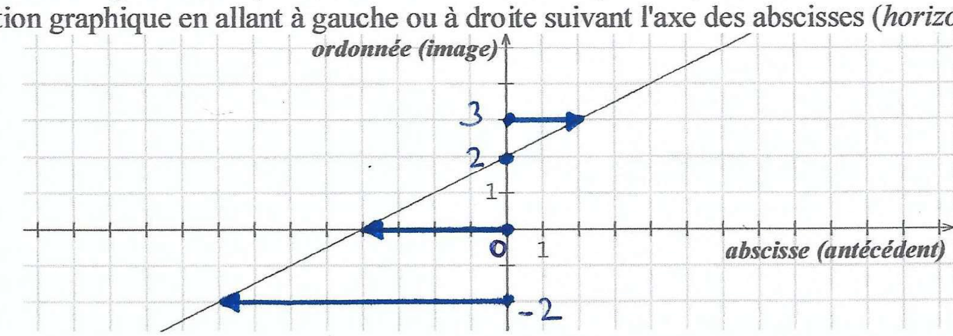
$-4x = 8$

$x = 8 : (-4) = -2$

L'antécédent de 11 est égal à -2 → $g(-2) = 11$

Antécédent d'un nombre avec la représentation graphique

Comme dans le cadre général, on part de l'axe des ordonnées (*vertical*) et on lit l'antécédent en rejoignant la représentation graphique en allant à gauche ou à droite suivant l'axe des abscisses (*horizontal*).



L'antécédent de -2 est -8 (on va vers la gauche de -8)

L'antécédent de 0 est -4

L'antécédent de 2 est 0 (on ne "bouge" pas)

L'antécédent de 3 est 2 (on va vers la droite de 2)

Représentation graphique d'une fonction affine : les propriétés

On va traiter deux exemples sur cette fiche, et on va accepter le fait de généraliser les résultats obtenus afin de les transformer en règles générales sur la représentation graphique des fonctions affines.

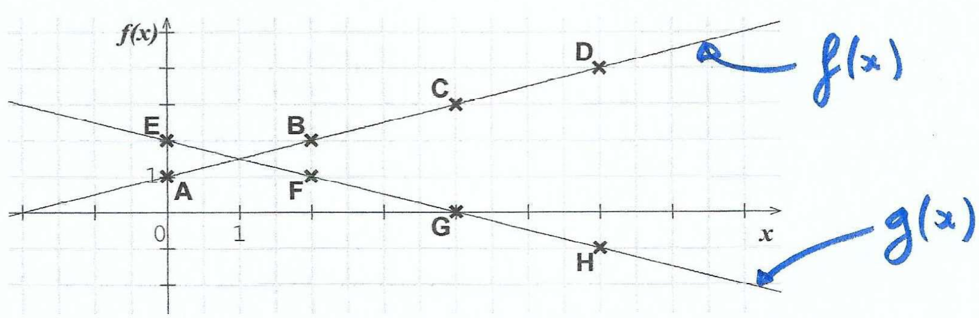
Tableaux de valeurs et lien avec les coordonnées

Pour obtenir le tableau de valeurs des *fonctions affines* définies par $f(x) = 0{,}5x + 1$ et $g(x) = -\,0{,}5x + 2$, il suffit de calculer les images des nombres de la première ligne de chaque tableau.

x	0	2	4	6
$f(x) = 0{,}5x + 1$	$0{,}5 \times 0 + 1 = 1$	$0{,}5 \times 2 + 1 = 2$	$0{,}5 \times 4 + 1 = 3$	$0{,}5 \times 6 + 1 = 4$
points du graphique	A(0 ; 1)	B(2 ; 2)	C(4 ; 3)	D(6 ; 4)

x	0	2	4	6
$g(x) = -\,0{,}5x + 2$	$-0{,}5 \times 0 + 2 = 2$	$-0{,}5 \times 2 + 2 = 1$	$-0{,}5 \times 2 + 2 = 0$	$-0{,}5 \times 6 + 2 = -1$
points du graphique	E(0 ; 2)	F(2 ; 1)	G(4 ; 0)	H(6 ; -1)

On place tous ces points dans un repère et en reliant les points A, B, C et D qui concerne la fonction f, on constate que ces points sont ***alignés*** : ils sont sur ***une même droite.***
De même, en reliant les points E, F, G et H qui concerne la fonction g , on constate que ces points sont également ***alignés*** : ils sont aussi sur ***une même droite***.



Conséquences et propiétés fondamentales

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction ***affine*** sera toujours une ***droite***.
Inversement, toute ***droite*** (*ne passant pas par l'origine*) peut être considérée comme la représentation graphique d'une fonction ***affine***.

Il n'y aura donc finalement que *deux possibilités de droites* pour les fonctions affines :

Les droites qui "***montent***" (en regardant le graphique de gauche à droite), comme ici pour la fonction f.
Cela concerne les fonctions affines dont le coefficient a est ***positif*** (pour f, il est égal à 0,5).
On dira dans ce cas que la fonction f est ***croissante***.

Les droites qui "***descendent***" (en regardant toujours de gauche à droite), comme ici pour la fonction g .
Cela concerne les fonctions affines dont le coefficient a est ***négatif*** (pour g , il est égal à - 0,5).
On dira dans ce cas que la fonction g est ***décroissante***.

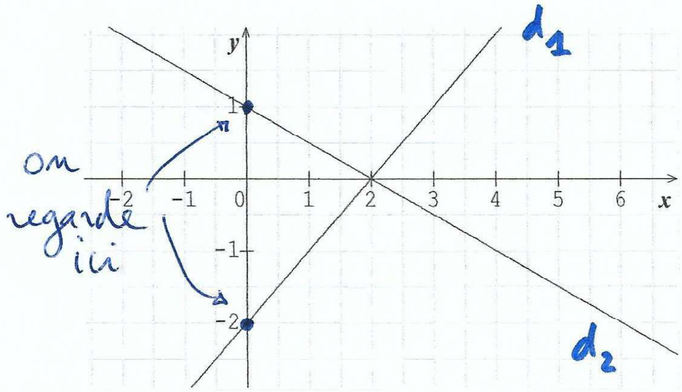
L'ordonnée à l'origine d'une fonction affine

Tant que l'on peut l'utiliser, avec les fonctions affines étudiées ou les droites tracées, cette ***ordonnée à l'origine*** sera très facile à donner mais aussi très intéressante pour la suite du chapitre.

L'ordonnée à l'origine

Cette ***ordonnée à l'origine*** correspond au nombre b défini dans toute fonction affine du type $ax + b$.
Il correspond au résultat obtenu si on cherche l'image de 0 , c'est à dire si on remplace x par 0 ,
c'est à dire si on se place au niveau "du zéro" des abscisses.
→ sur un graphique, cette ***ordonnée à l'origine*** est très facile à obtenir.

Quand on regarde la droite qui représente une fonction affine, c'est l'ordonnée que l'on peut lire sur l'axe des ....ordonnées , c'est à dire pour une abscisse égale à 0.

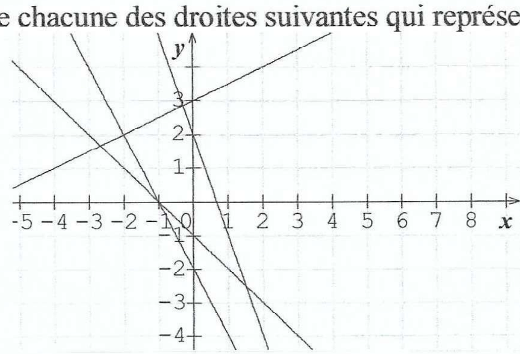


pour la droite d_1,
l'ordonnée à l'origine
est égale à -2.

pour la droite d_2,
l'ordonnée à l'origine
est égale à 1.

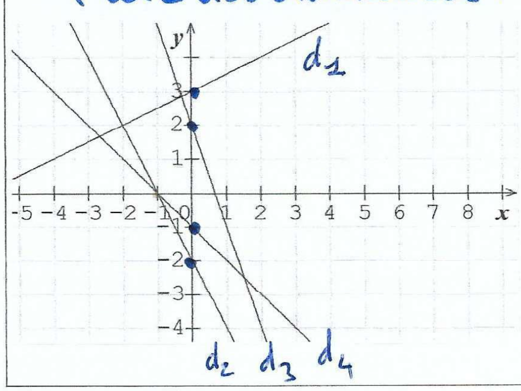
Application

Donner l'ordonnée à l'origine de chacune des droites suivantes qui représentent des fonctions affines.



Réponses :

On visualise bien les intersections des droites avec l'axe des ordonnées.



Les ordonnées à l'origine sont :

pour $d_1 \to 3$

pour $d_2 \to -2$

pour $d_3 \to 2$

pour $d_4 \to -1$

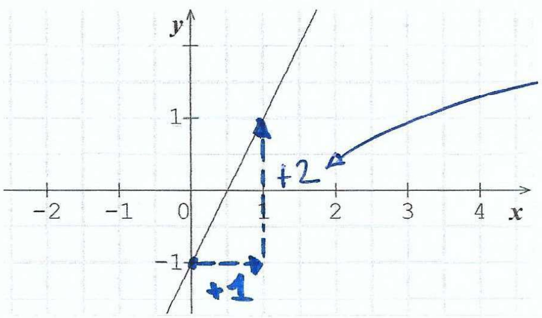
Le coefficient (directeur) d'une fonction affine

Avant d'apprendre, plus tard, à le calculer, on va dans un premier temps apprendre à ***déterminer ce coefficient à l'aide d'un travail graphique*** sur la droite représentant la fonction affine.

La méthode

Ce ***coefficient*** correspond au nombre *a* défini dans toute fonction affine du type $ax + b$.
On va voir ici une méthode de base qui sera suffisante dans une très grande majorité des situations.

1) on se place sur un point de la droite bien défini par les carreaux (ne pas se placer "entre les carreaux").
2) on se décale de + 1 (soit de "une unité") sur les abscisses en horizontale.
3) on rejoint la droite de la fonction affine, soit en montant (coefficient positif), soit en descendant (coefficient négatif) → le coefficient est égal à ce dernier nombre.

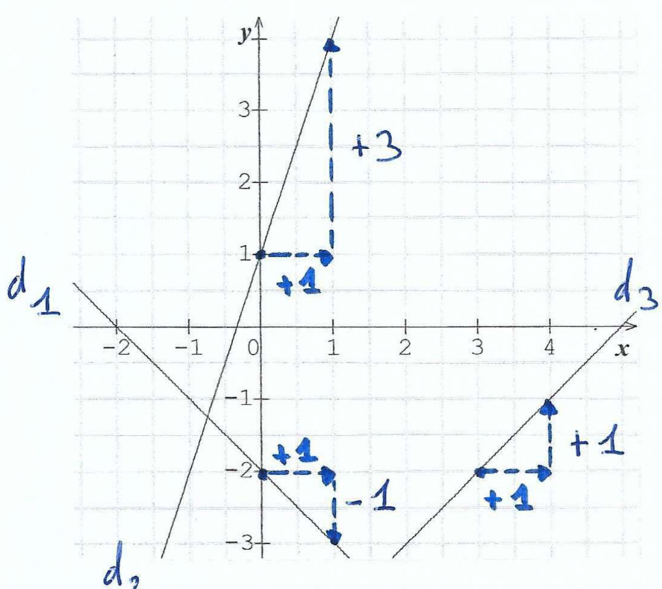


Le coefficient se lit ici.
Il est positif car il a fallu monter pour rejoindre la droite.
→ le coefficient est égal à 2.

Astuce : on partira autant que possible de l'ordonnée à l'origine si elle est bien définie par les lignes des carreaux. Mais on verra que l'on peut partir d'un autre point de la droite.

Application

Donner le coefficient (directeur) de chacune des droites suivantes qui représentent des fonctions affines.



pour d_1, le coefficient est égal à −1.

pour d_2, le coefficient est égal à 3.

pour d_3, on doit partir d'un autre point que l'ordonnée à l'origine
→ la méthode reste inchangée et le coefficient est égal à 1.

Comment tracer la représentation graphique d'une fonction affine : la méthode générale

Vous pourrez être amené à croiser différentes méthodes pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine. N'oubliez pas de choisir UNE de ces méthodes comme "*méthode refuge*". Ce sera celle que l'on sait pouvoir toujours réussir.
Ainsi, je vais faire le choix d'une méthode basique sur cette fiche qui pourra être cette "*méthode refuge*".

La méthode pour obtenir la représentation graphique d'une fonction affine

Le principe de base est très simple.

Puisque la représentation graphique d'une *fonction affine* est une *droite*, il suffit de placer ***deux points*** dans le repère et, ensuite, on trace la droite qui passe par ces deux points.

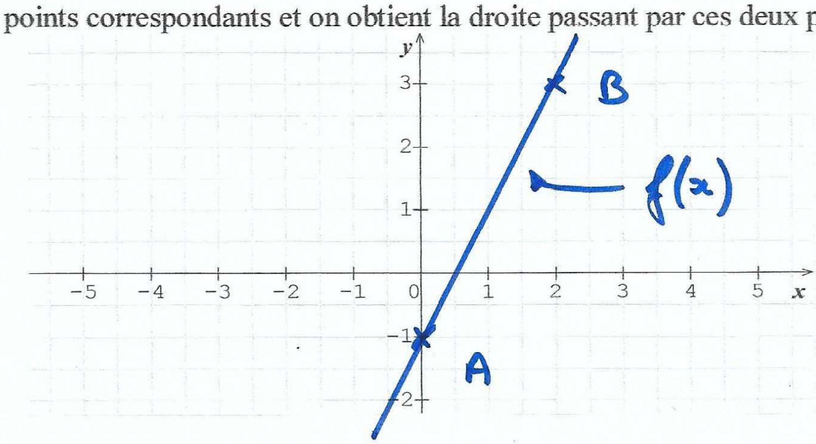
La méthode peut alors se décrire de la façon suivante.

On doit donc obtenir **deux points de la droite** pour pouvoir la tracer.
Il faudra donc faire un **tableau de valeurs** en remplaçant x par deux nombres, puis en calculant les images respectives de ces deux nombres.
On obtient alors les **coordonnées de 2 points**, et il suffira de les relier pour obtenir la droite !

Un exemple avec $f(x) = 2x - 1$ → on décide de remplacer x par 0 , puis x par 2.

x	0	2
$f(x)$	$2 \times 0 - 1$ $= -1$	$2 \times 2 - 1$ $= 3$
points du graphique	$A(0\,;-1)$	$B(2\,;3)$

On place les deux points correspondants et on obtient la droite passant par ces deux points.



On peut alors vérifier que la droite "monte" ce qui correspond bien à un coefficient 2 qui est ***positif****.*

Comment savoir par quels nombres on va remplacer x ?

Il faudra juste bien comprendre que c'est vous qui choisissez les deux valeurs de x !!
Vous faites comme vous voulez tant que... tant que les points rentrent dans votre graphique et que les valeurs ne sont pas approximatives (il faut privilégier les nombres entiers, bien sûr).
Sur l'exemple précédent, en remplaçant x par 3 , on aurait obtenu une image égale à $2 \times 3 - 1 = 5$ et le repère ne monte pas aussi "haut" !!
→ vous pouvez donc démarrer avec l'idée de toujours remplacer x par 0 , puis x par 2.
Puis, vous apprendrez, avec l'expérience, à adapter vos valeurs aux situations rencontrées.....

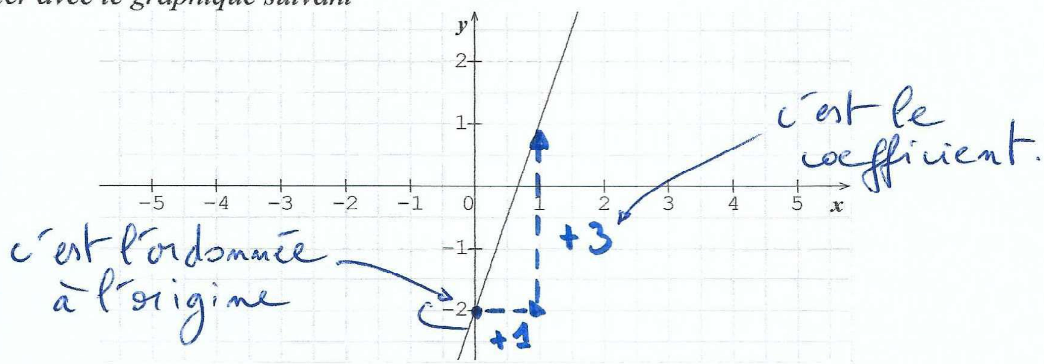
Comment retrouver l'expression d'une fonction affine avec son ordonnée à l'origine et son coefficient

La situation

Le but est ici de retrouver la valeur de a et la valeur de b de l'expression $a\,x + b$.
Il faudra que la droite représentant la fonction affine soit donnée avec la possibilité de lire graphiquement **"sans aucun doute"** son *ordonnée à l'origine* et son *coefficient*.
C'est la situation basique à parfaitement maitriser en classe de troisième.

Méthode

On va travailler avec le graphique suivant



Etape 1 : on détermine le nombre b , c'est à dire l'ordonnée à l'origine

L'ordonnée à l'origine est égale à -2

Etape 2 : on détermine le nombre a , c'est à dire le coefficient (directeur) de la droite

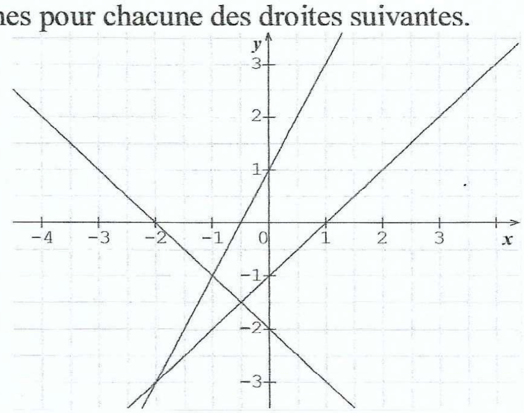
Le coefficient est égal à 3

Conclusion :

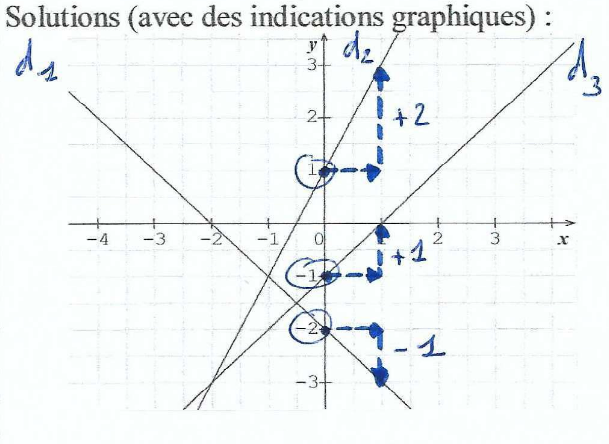
On obtient $f(x) = \underbrace{3}_{a}x + \underbrace{(-2)}_{b} = 3x - 2$

Application

Le but est de retrouver l'expression des fonctions affines pour chacune des droites suivantes.



Solutions (avec des indications graphiques) :



pour $d_1 \longrightarrow a = -1$ et $b = -2 \longrightarrow f(x) = -1x + (-2) = -x - 2$

pour $d_2 \longrightarrow a = 2$ et $b = 1 \longrightarrow f(x) = 2x + 1$

pour $d_3 \longrightarrow a = 1$ et $b = -1 \longrightarrow f(x) = 1x + (-1) = x - 1$

Comment retrouver l'expression d'une fonction affine à l'aide de deux nombres et de leur image

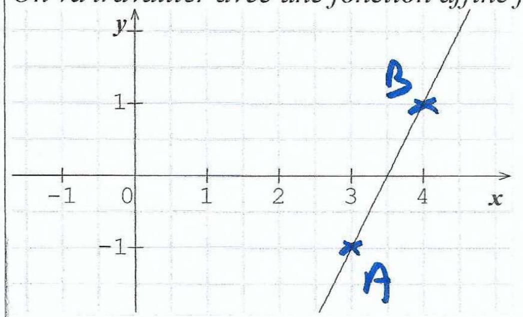
Le but reste toujours bien de retrouver la valeur de a et la valeur de b de l'expression $a\,x + b$.
Ce type d'énoncé se retrouve plutôt en Seconde (mais on peut tout à fait le voir en Troisième)

Comment bien retranscrire les énoncés

Que l'énoncé nous donne *deux points avec leurs coordonnées* (ici A (3 ; - 1) et B (4 ; 1)) ou *deux nombres avec leur image* (ici $f(3) = -1$ et $f(4) = 1$), c'est en fait la même chose et la méthode suivante pourra s'appliquer de la même façon.

Méthode

On va travailler avec une fonction affine f dont on donne la représentation graphique



pour ces deux points A et B, on peut écrire :

$A(\underbrace{3}_{x_a} ; \underbrace{-1}_{y_a})$ et $B(\underbrace{4}_{x_b} ; \underbrace{1}_{y_b})$

ou $f(\underbrace{3}_{x_a}) = \underbrace{-1}_{y_a}$ et $f(\underbrace{4}_{x_b}) = \underbrace{1}_{y_b}$

Etape 1 : on calcule le coefficient a

La formule pour calculer ce coefficient est : $a = \dfrac{f(Xb) - f(Xa)}{Xb - Xa} = \dfrac{Yb - Ya}{Xb - Xa}$

→ on doit TOUJOURS écrire les abscisses x en BAS

→ l'ordre des lettres A et B doit être le même en haut et en bas.

On calcule : $a = \dfrac{\overset{y_b}{1} - \overset{y_a}{(-1)}}{\underset{x_b}{4} - \underset{x_a}{3}} = \dfrac{2}{1} = 2 \rightarrow a = 2$

Etape 2 : on calcule la valeur du nombre b

$a = 2$ → la fonction peut donc s'écrire $f(x) = 2x + b$

et, avec le point A, on sait qu'en remplaçant x par 3, on obtient une image égale à -1.

On écrit alors : $\underset{f(x_a)}{-1} = 2 \times \underset{x_a}{3} + b$

→ on résout : $-1 = 6 + b \rightarrow b = -1 - 6 = -7$

Conclusion :

On obtient $a = 2$ et $b = -7$ → $f(x) = \underbrace{2}_{a}x \underbrace{- 7}_{b}$

Remarque

Dans l'étape 2, on a utilisé les valeurs qui concernent le point A.
On trouverait le même résultat pour le nombre b en utilisant les valeurs qui concernent le point B.