Des exercices sur l'étude de la monotonie d'une suite

Sur cette fiche, on va travailler avec la méthode de base (**en cherchant le signe de $U_{n+1} - U_n$**) qui doit rester une référence ultime. Une fois cette méthode bien maitrisée, votre esprit sera plus ouvert pour vous intéresser aux différentes variantes possibles (vues parfois en classe).
Attention, vous verrez que, sur cette fiche, le plus important est de parfaitement maitriser le calcul algébrique (développer, opérations sur les puissances, factoriser .....).

On cherche la monotonie de la suite définie par $U_n = n^2 - 6n$

On calcule $U_{n+1} = (n+1)^2 - 6(n+1) = n^2 + 2n + 1 - 6n - 6$

soit $U_{n+1} = n^2 - 4n - 5$

On obtient $U_{n+1} - U_n = \underbrace{n^2 - 4n - 5}_{U_{n+1}} - \underbrace{(n^2 - 6n)}_{U_n}$ ← ne pas oublier les parenthèses

→ $U_{n+1} - U_n = 2n - 5$ → POSITIF pour n égal (ou supérieur) à 3

La suite est CROISSANTE à partir du rang 3 (soit $n \geq 3$).

On cherche la monotonie de la suite définie par $U_n = 2 \times 0{,}8^n$

On calcule $U_{n+1} = 2 \times 0{,}8^{n+1}$

On obtient $U_{n+1} - U_n = 2 \times 0{,}8^{n+1} - 2 \times 0{,}8^n = 2 \times 0{,}8^n (0{,}8 - 1)$

soit $U_{n+1} - U_n = 2 \times 0{,}8^n \times (-0{,}2) = -0{,}4 \times 0{,}8^n$

avec $-0{,}4 \times 0{,}8^n$ qui est NÉGATIF pour tout n.

La suite est DÉCROISSANTE à partir du rang 0 (soit $n \geq 0$).

On cherche la monotonie de la suite définie par $U_n = 20 - 15 \times 0{,}9^n$

On calcule $U_{n+1} = 20 - 15 \times 0{,}9^{n+1}$

On obtient $U_{n+1} - U_n = \underbrace{20 - 15 \times 0{,}9^{n+1}}_{U_{n+1}} - (\underbrace{20 - 15 \times 0{,}9^n}_{U_n})$

soit $U_{n+1} - U_n = 15 \times 0{,}9^n - 15 \times 0{,}9^{n+1} = 15 \times 0{,}9^n (1 - 0{,}9)$

soit $U_{n+1} - U_n = 15 \times 0{,}9^n \times 0{,}1 = 1{,}5 \times 0{,}9^n$

avec $1{,}5 \times 0{,}9^n$ qui est POSITIF pour tout n.

La suite est CROISSANTE à partir du rang 0 (soit $n \geq 0$).

On cherche la monotonie de la suite définie par $U_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$

On calcule $U_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{(n+1)+1}} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}}$

On obtient $U_{n+1} - U_n = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} - \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3^{n+1} - 2 \times 3^n}{2^{n+2}} = \frac{3^n(3-2)}{2^{n+2}} = \frac{3^n}{2^{n+2}}$

avec $\frac{3^n}{2^{n+2}}$ qui est POSITIF pour tout n

La suite est CROISSANTE à partir du rang 0 (soit $n \geq 0$).

On cherche la monotonie de la suite définie par $U_n = \frac{2n+3}{-n+1}$ $\rightarrow (n \neq 1)$

On calcule $U_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{-(n+1)+1} = \frac{2n+5}{-n} = -\frac{2n+5}{n}$

On obtient $U_{n+1} - U_n = \underbrace{-\frac{2n+5}{n}}_{U_{n+1}} - \underbrace{\frac{2n+3}{-n+1}}_{U_n} = \frac{-(2n+5)(-n+1) - (2n+3)n}{n(-n+1)}$

$\rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{-(-2n^2+2n-5n+5) - (2n^2+3n)}{n(-n+1)} = \frac{\overbrace{-5}^{\text{négatif}}}{\underbrace{n}_{\text{positif}}\underbrace{(-n+1)}_{\text{négatif à partir de 1}}}$

Donc $U_{n+1} - U_n$ est POSITIF à partir du rang 1

La suite est CROISSANTE à partir du rang 1 (soit $n > 1$).
(avec $n \neq 1$)

On cherche la monotonie de la suite définie par $U_n = \frac{2^n}{n}$ $\rightarrow (n \neq 0)$

On calcule $U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$

On obtient $U_{n+1} - U_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n} = \frac{n\,2^{n+1} - (n+1)2^n}{(n+1)n}$

soit $U_{n+1} - U_n = \frac{2^n(2n-(n+1))}{(n+1)n} = \frac{2^n\overbrace{(n-1)}^{\text{positif à partir de 1}}}{(n+1)n}$

Donc $U_{n+1} - U_n$ est POSITIF à partir du rang 1

La suite est CROISSANTE à partir du rang 1 (soit $n \geq 1$)