Des exercices avec la fonction exponentielle : calculs de dérivées et études de variations

On va, tout de suite, intégrer cette "nouvelle" fonction *exponentielle* au travail général que l'on a déjà vu cette année de première : on va calculer des *dérivées* avec, par exemple, les formules (uv)' ou ($\frac{u}{v}$)' et on va étudier les *signes de ces dérivées* pour trouver les *variations* des fonctions à étudier.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par $f(x) = e^x + x$
a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$
b) Etudier le signe de f' puis en déduire les variations de la fonction f.

a) on a $f'(x) = e^x + 1$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, e^x est strictement positif ($e^x > 0$)
Donc $f'(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$
Donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

On obtient :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par $f(x) = e^x - x$
a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$
b) Etudier le signe de f' puis en déduire les variations de la fonction f.

a) on a $f'(x) = e^x - 1$

b) on résout $e^x - 1 = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow e^x = e^0 \rightarrow x = 0$

on obtient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(0) = e^0 - 0$
$= 1$

→ pour trouver les signes, on peut :

① utiliser les propriétés de e^x :
soit $e^x - 1 > 0 \rightarrow e^x > 1$
$\rightarrow e^x > e^0 \rightarrow x > 0$

② on utilise une valeur "test" :
on calcule, par exemple, $f'(2) = e^2 - 1$ (qui est > 0)
et donc $f'(x)$ sera positif pour TOUS les nombres comme 2 qui sont dans $[0\,;+\infty[$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par $f(x)=(2x+3)e^{-x}$
a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$
b) Etudier le signe de f' puis en déduire les variations de la fonction f.

a) on calcule $f'(x) = \underbrace{2}_{u'}\times\underbrace{e^{-x}}_{v} + \underbrace{(2x+3)}_{u}\times\underbrace{(-e^{-x})}_{v'}$ avec $(e^{-x})' = -e^{-x}$

$\rightarrow f'(x) = e^{-x}(2-2x-3) = e^{-x}(-2x-1)$ ⚠

b) on résout $-2x-1=0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

on obtient :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
e^{-x}		$+$		$+$	
$-2x-1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$-2x-1$ → signes d'une fonction affine

$f(-\frac{1}{2}) = (2\times(-\frac{1}{2})+3)e^{-(-\frac{1}{2})} = 2e^{\frac{1}{2}}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par $f(x)=(3x-5)e^{x}$
a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$
b) Etudier le signe de f' puis en déduire les variations de la fonction f.

a) on calcule $f'(x) = \underbrace{3}_{u'}\times\underbrace{e^{x}}_{v} + \underbrace{(3x-5)}_{u}\underbrace{e^{x}}_{v'} = e^{x}(3+3x-5)$
$= e^{x}(3x-2)$

b) on résout $3x-2=0 \rightarrow x=\frac{2}{3}$

on obtient :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
e^{x}		$+$		$+$	
$3x-2$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$3x-2$ → signes d'une fonction affine

$f(\frac{2}{3}) = (3\times\frac{2}{3}-5)e^{\frac{2}{3}} = -3e^{\frac{2}{3}}$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par $f(x)=(2x^2-4x+2)e^x$

a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$

b) Etudier le signe de f' puis en déduire les variations de la fonction f.

a) on a $f'(x) = (\underbrace{4x-4}_{u'})\underbrace{e^x}_{v} + (\underbrace{2x^2-4x+2}_{u})\underbrace{e^x}_{v'}$

$= e^x(4x-4+2x^2-4x+2) = e^x(2x^2-2)$

b) on résout $2x^2-2=0 \rightarrow \Delta$ avec $a=2$ $b=0$ $c=-2$.

ou $2x^2=2 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=-1$

ou $x=1$.

On obtient :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
e^x		$+$		$+$		$+$	
$2x^2-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

→ signes d'un trinôme

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$

b) Etudier le signe de f' puis en déduire les variations de la fonction f.

a) on a $f'(x) = \dfrac{1\times e^x - x\times e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \dfrac{1-x}{e^x}$

avec $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

b) on résout $1-x=0 \rightarrow x=1$

on obtient :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

→ signes d'une fonction affine

$f(1)=\dfrac{1}{e^1}=\dfrac{1}{e}=e^{-1}$