

Des exercices avec la fonction exponentielle :
calculs de dérivées et études de variations

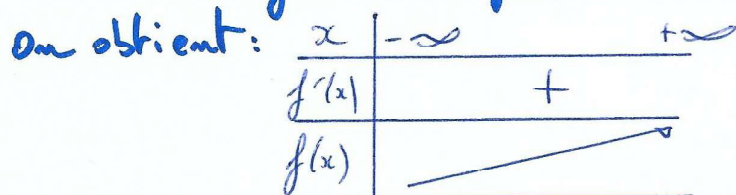
On va, tout de suite, intégrer cette "nouvelle" fonction *exponentielle* au travail général que l'on a déjà vu cette année de première : on va calculer des *dérivées* avec, par exemple, les formules $(uv)'$ ou $(\frac{u}{v})'$ et on va étudier les *signes de ces dérivées* pour trouver les *variations* des fonctions à étudier.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $f(x) = e^x + x$

- a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$
b) Etudier le signe de f' puis en déduire les variations de la fonction f .

- a) on a $f'(x) = e^x + 1$
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, e^x est strictement positif ($e^x > 0$)
donc $f'(x)$ est strictement positive sur \mathbb{R}
donc la fonction f est croissante sur \mathbb{R}

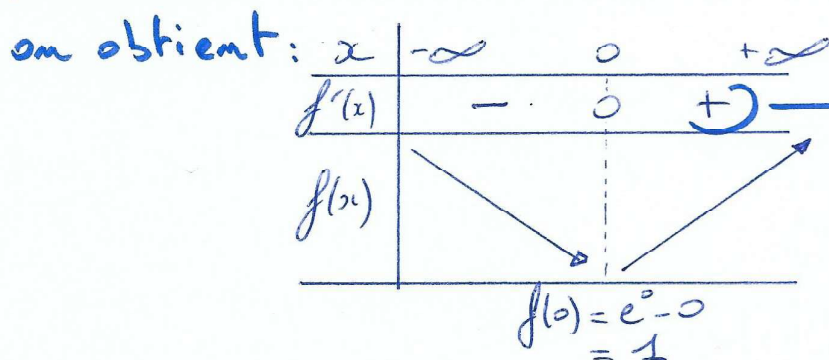


Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $f(x) = e^x - x$

- a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$
b) Etudier le signe de f' puis en déduire les variations de la fonction f .

- a) on a $f'(x) = e^x - 1$
b) on résout $e^x - 1 = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow e^x = e^0 \rightarrow x = 0$



pour trouver ces signes, on peut:
① utiliser les propriétés de e^x
soit $e^x - 1 > 0 \rightarrow e^x > 1$
 $\rightarrow e^x > e^0 \rightarrow x > 0$

② on utilise une valeur "test".
on calcule, par exemple, $f'(2) = e^2 - 1$ (qui est > 0)
et donc $f'(x)$ sera positif pour tous les nombres comme 2 qui sont dans $[0; +\infty[$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $f(x) = (2x+3)e^{-x}$

a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$

b) Etudier le signe de f' puis en déduire les variations de la fonction f .

a) on calcule $f'(x) = \underbrace{2x}_{u'} \underbrace{e^{-x}}_v + (\underbrace{2x+3}_u) \times (\underbrace{-e^{-x}}_{v'})$ avec $(e^{-x})' = -e^{-x}$
 $\rightarrow f'(x) = e^{-x}(2 - 2x - 3) = e^{-x}(-2x-1)$

b) on résout $-2x-1=0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

on obtient: x | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$

e^{-x}	+		+
$-2x-1$	+	○	-
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$	↗		↘

→ signes d'une fonction affine

$f(-\frac{1}{2}) = (2 \times (-\frac{1}{2}) + 3)e^{-(-\frac{1}{2})} = 2e^{\frac{1}{2}}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $f(x) = (3x-5)e^x$

a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$

b) Etudier le signe de f' puis en déduire les variations de la fonction f .

a) on calcule $f'(x) = \underbrace{3x}_{u'} \underbrace{e^x}_v + (\underbrace{3x-5}_u) \underbrace{e^x}_{v'} = e^x(3+3x-5) = e^x(3x-2)$

b) on résout $3x-2=0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

on obtient: x | $-\infty$ | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$

e^x	+		+
$3x-2$	-	○	+
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	↘		↗

→ signes d'une fonction affine

$f(\frac{2}{3}) = (3 \times \frac{2}{3} - 5)e^{\frac{2}{3}} = -3e^{\frac{2}{3}}$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; +\infty [$ par $f(x) = (2x^2 - 4x + 2)e^x$

a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$

b) Etudier le signe de f' puis en déduire les variations de la fonction f .

$$\begin{aligned} \text{a) on a } f'(x) &= \underbrace{(4x-4)}_u \underbrace{e^x}_v + \underbrace{(2x^2-4x+2)}_u \underbrace{e^x}_v' \\ &= e^x (4x-4+2x^2-4x+2) = e^x (2x^2-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) on résout } 2x^2-2=0 &\rightarrow \Delta \text{ avec } a=2 \quad b=0 \quad c=-2. \\ &\text{ou } 2x^2=2 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=-1 \\ &\text{ou } x=1. \end{aligned}$$

On obtient:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
e^x	+	+	+	+	
$2x^2-2$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

→ signes d'un trinôme

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{x}{e^x}$

a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$

b) Etudier le signe de f' puis en déduire les variations de la fonction f .

$$\text{a) on a } f'(x) = \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

avec $\frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\text{b) on résout } 1-x=0 \rightarrow x=1$$

on obtient:

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
$1-x$	+	0	-	
e^x	+	+	+	
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$				

→ signes d'une fonction affine

$$f(1) = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$