Des exercices où l'on montre qu'une suite est géométrique ou arithmétique (suites arithmético–géométriques ou autres ....)

Une fois la méthode acquise avec la fiche précédente, on va s'exercer avec diverses consignes, en commençant par des strictes applications, puis en finissant avec deux exercices pour lesquels la méthode de base doit servir de refuge pour pouvoir ouvrir son esprit à d'autres méthodes vues dans les classes.

Exercice 1

On considère la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = 1{,}2\ U_n - 40$ et $U_0 = 4$ → c'est la formule 1

On pose alors la suite (V_n) définie par : $V_n = U_n - 200$ → c'est la formule 2

Montrer que la suite (V_n) est géométrique, et en déduire l'expression de U_n en fonction de n .

On a $V_n = U_n - 200$ → on obtient $U_n = V_n + 200$
(c'est la formule 3)

On part de $V_{n+1} = U_{n+1} - 200$ (avec la formule 2)

$= 1{,}2U_n - 40 - 200$ (avec la formule 1)

$= 1{,}2(V_n + 200) - 40 - 200$ (avec la formule 3)

$= 1{,}2V_n + \underbrace{240 - 40 - 200}_{0}$

On obtient $V_{n+1} = 1{,}2V_n$

→ suite géométrique de raison 1,2
et de premier terme $V_0 = U_0 - 200 = -196$

→ on en déduit $V_n = V_0 \times q^{(n-0)}$
soit $V_n = -196 \times (1{,}2)^n$

→ on en déduit finalement
$U_n = V_n + 200$ (on reprend la formule 3)

soit $U_n = -196 \times (1{,}2)^n + 200$

Exercice 2

c'est la formule 1

On considère la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = 0{,}75\ U_n + 25$ et $U_0 = 40$.

On pose alors la suite (V_n) définie par : $V_n = U_n - 100$ c'est la formule 2

Montrer que la suite (V_n) est géométrique, et en déduire l'expression de U_n en fonction de n .

On a $V_n = U_n - 100$ → on obtient $U_n = V_n + 100$
(c'est la formule 3)

On part de $V_{n+1} = U_{n+1} - 100$ (avec la formule 2)

$= 0{,}75\,U_n + 25 - 100$ (avec la formule 1)

$= 0{,}75\,(V_n + 100) + 25 - 100$ (avec la formule 3)

$= 0{,}75\,V_n + \underbrace{75 + 25 - 100}_{0}$

On obtient $V_{n+1} = 0{,}75\,V_n$

→ suite géométrique de raison 0,75
et de premier terme $V_0 = U_0 - 100 = -60$

→ on en déduit $V_n = V_0 \times q^{(n-0)}$

soit $V_n = -60 \times (0{,}75)^n$

→ on en déduit finalement

$U_n = V_n + 100$ (on reprend la formule 3)

soit $U_n = -60 \times (0{,}75)^n + 100$

Exercice 3

On considère la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = \dfrac{3Un}{1+2Un}$ et $U_0 = 0{,}5$. → c'est la formule 1

On pose alors la suite (V_n) définie par : $V_n = \dfrac{Un}{1-Un}$ → c'est la formule 2

Montrer que la suite (V_n) est géométrique, et en déduire l'expression de U_n en fonction de n .

La méthode générale fonctionnera toujours très bien, mais la difficulté va être ici d'obtenir la *formule 3* en inversant la *formule 2* pour obtenir U_n en fonction de V_n. Pour éviter cela, certains professeurs proposent d'autres méthodes. Pour se rendre compte que, tôt ou tard, on est obligé de se confronter à cette difficulté.

* On a $V_n = \dfrac{U_n}{1-U_n}$

soit $V_n(1-U_n) = U_n \rightarrow V_n - V_n U_n = U_n \rightarrow -U_n - V_n U_n = -V_n$

On obtient $U_n(-1-V_n) = -V_n$ soit $U_n = \dfrac{-V_n}{-1-V_n} = \dfrac{V_n}{1+V_n}$

(c'est la formule 3 !!).

* On part de $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1}}{1-U_{n+1}} = \dfrac{\frac{3U_n}{1+2U_n}}{1-\frac{3U_n}{1+2U_n}} = \dfrac{\frac{3U_n}{\cancel{1+2U_n}}}{\frac{1+2U_n-3U_n}{\cancel{1+2U_n}}} = \dfrac{3U_n}{1-U_n}$

on obtient $V_{n+1} = \dfrac{3\frac{V_n}{1+V_n}}{1-\frac{V_n}{1+V_n}} = \dfrac{\frac{3V_n}{\cancel{1+V_n}}}{\frac{1+V_n-V_n}{\cancel{1+V_n}}} = \dfrac{3V_n}{1} = 3V_n$ (ouf !)

→ suite géométrique de raison 3
et de premier terme $V_0 = \dfrac{U_0}{1-U_0} = \dfrac{0{,}5}{1-0{,}5} = 1$

→ on en déduit $V_n = V_0 \times q^{(n-0)}$
soit $V_n = 1 \times 3^n = 3^n$

→ on en déduit finalement
$U_n = \dfrac{V_n}{1+V_n}$ (on reprend la formule 3)

soit $U_n = \dfrac{3^n}{1+3^n}$

Exercice 4 $\longrightarrow$ c'est la formule 1

On considère la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = \dfrac{9}{6-Un}$ et $U_0 = 1$.

On pose alors la suite (V_n) définie par : $V_n = \dfrac{1}{Un-3}$ $\longrightarrow$ c'est la formule 2

Montrer que la suite (V_n) est arithmétique, et en déduire l'expression de U_n en fonction de n .

De même que pour l'exercice 3, il est possible de croiser d'autres méthodes que la méthode générale vue ici. Mais, je reste persuadé que vous aurez l'esprit d'autant plus disponible pour les comprendre si la méthode de base est bien maitrisée.
Attention juste au fait que, *pour une fois*, on cherche à montrer que la suite est ***arithmétique***.

* On a $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$

soit $V_n(U_n - 3) = 1 \longrightarrow V_n U_n - 3V_n = 1$

on obtient $V_n U_n = 1 + 3V_n$ soit $U_n = \dfrac{1+3V_n}{V_n}$

(c'est la formule 3 !!)

* on part de $V_{n+1} = \dfrac{1}{U_{n+1} - 3} = \dfrac{1}{\dfrac{9}{6-U_n} - 3} = \dfrac{1}{\dfrac{9 - 18 + 3U_n}{6-U_n}}$

et on obtient $V_{n+1} = \dfrac{6-U_n}{3U_n - 9} = \dfrac{6 - \dfrac{1+3V_n}{V_n}}{3 \times \dfrac{1+3V_n}{V_n} - 9} = \dfrac{\dfrac{6V_n - 1 - 3V_n}{\cancel{V_n}}}{\dfrac{3 + 9V_n - 9V_n}{\cancel{V_n}}}$

soit $V_{n+1} = \dfrac{3V_n - 1}{3} = V_n - \dfrac{1}{3}$ (ouf !)

$\longrightarrow$ suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

et de premier terme $V_0 = \dfrac{1}{U_0 - 3} = -\dfrac{1}{2}$

$\longrightarrow$ on en déduit $V_n = V_0 + (n-0) \times \text{raison}$

soit $V_n = -\dfrac{1}{2} + n \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}n - \dfrac{1}{2}$

$\longrightarrow$ on en déduit finalement

$U_n = \dfrac{1+3V_n}{V_n}$ (on reprend la formule 3)

soit $U_n = \dfrac{1 + 3\left(-\frac{1}{3}n - \frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{3}n - \frac{1}{2}} = \dfrac{-n - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}n - \frac{1}{2}} = \dfrac{6n+3}{2n+3}$