Un exemple d'équation avec la fonction logarithme népérien : attention à bien gérer le domaine de définition

La fonction logarithme *ln* n'est définie que sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [et il va toujours se poser la question du *domaine de validité* du travail algébrique effectué: c'est la recherche du *domaine de définition*.

L'équation sur laquelle on va travailler

On veut résoudre l'équation : $ln(2-x) + ln(x+3) = ln(x-1)$

La résolution de cette équation avec les étapes à bien respecter

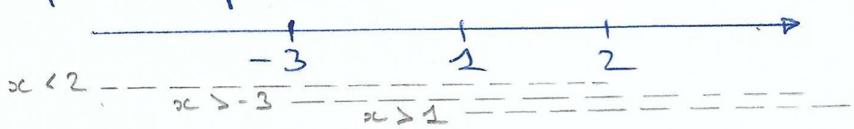
→ étape 1 : il faut déterminer le domaine de définition de cette équation.

il faut $2-x>0$ soit $x<2$ pour $ln(2-x)$

$x+3>0$ soit $x>-3$ pour $ln(x+3)$

$x-1>0$ soit $x>1$ pour $ln(x-1)$

→ je vous conseille de résumer tout cela sur un axe sur lequel on place les 3 conditions.



Les 3 conditions sont réunies pour $D_f =]1\,;2[$

→ étape 2 : on résout cette équation en appliquant les propriétés classiques de la fonction *ln*.

On obtient $ln(2-x)(x+3) = ln(x-1)$ car $ln\,a + ln\,b = ln(a\times b)$.

soit $(2-x)(x+3) = x-1$ en "enlevant" le ln.

soit $-x^2-2x+7=0$ en développant et en regroupant.

→ on obtient $\Delta = (-2)^2 - 4\times(-1)\times 7 = 32$

→ il y a deux solutions : $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{32}}{-2} \approx 1{,}83$

et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{32}}{-2} \approx -3{,}83$

→ étape 3 : on confronte alors les solutions trouvées au *domaine de définition* trouvée à l'étape 1.

On constate que $x_1 \in D_f$ mais que $x_2 \notin D_f$.

Donc la seule solution possible est x_1.

On a $S = \left\{ \dfrac{2-\sqrt{32}}{-2} \right\}$ qui s'écrit aussi $-1+2\sqrt{2}$.