Un exemple d'inéquation avec l'inconnue en puissance

Souvent, à la fin d'un travail sur les suites, une fois obtenue la formule explicite, on peut nous demander (pour respecter une contrainte) de résoudre une inéquation où l'inconnue se trouve en puissance.
Il faut donc savoir bien appliquer la méthode de calculs décrite sur cette page !

Enoncé

On a obtenu la formule explicite d'une suite (U_n) avec $U_n = 80 - 60 \times 0{,}75^{\,n}$.
Dans l'exercice, on aura montré que la suite est croissante et convergente avec une limite égale à 80.
On va donc ici chercher à partir de quel rang n la suite (U_n) devient supérieure à 79,9.

Résolution de l'inéquation

On va utiliser une propriété de la fonction *ln* qui nous permettra de "faire descendre la puissance" :

$$\ln(a^n) = n \times \ln(a)$$

On résout donc : $80 - 60 \times 0{,}75^n > 79{,}9$

soit $-60 \times 0{,}75^n > -0{,}1$

soit $0{,}75^n < \frac{-0{,}1}{-60} = \frac{1}{600}$ attention, on a divisé par un négatif !

on peut appliquer la fonction ln qui est croissante et qui, donc, conserve l'ordre !

On obtient $\ln(0{,}75^n) < \ln\left(\frac{1}{600}\right)$

c'est à dire $n \times \ln(0{,}75) < \ln\left(\frac{1}{600}\right)$

la puissance a pu passer "devant".

On obtient donc : $n > \dfrac{\ln\left(\frac{1}{600}\right)}{\ln 0{,}75}$

Vous ferez attention au fait que ln 0,75 est un nombre NÉGATIF → on doit inverser l'inégalité.

On obtient : $n > 22{,}236\ldots$

Donc la suite (U_n) devient supérieure à 79,9 à partir du rang 23 .

On peut vérifier que $U_{22} \approx 79{,}893$ et $U_{23} \approx 79{,}92$