Le calcul littéral : les conventions d'écriture à apprendre

En mathématiques, le *calcul littéral* (ou *calcul algébrique*) concerne les calculs se faisant avec des *lettres*. Pour bien aborder ce chapitre, il est ***fondamental*** de voir et ***d'apprendre*** les *conventions d'écriture* liées à ces calculs. Et j'insiste sur le fait ***d'apprendre*** !
En effet, on peut chercher à comprendre pourquoi " $x + x = 2x$ " et pourquoi " $x \times x = x^2$ ",
MAIS je pense, qu'à un moment donné, il faut surtout ***l'apprendre***.

La première convention à bien maitriser : on a le droit de ne pas écrire le signe ×

Si on a une ***multiplication entre un nombre et une lettre***, ou ***entre un nombre et une parenthèse***, on peut simplifier l'écriture en n'écrivant pas le signe ×.

→ il faudra aussi se souvenir de cette convention pour rajouter ce signe × quand ce sera nécessaire.

$4 \times x = 4x$ → on peut enlever le signe ×

$x \times 5 = 5 \times x = 5x$ → on n'écrira jamais $x5$

$1 \times x = 1x = x$
$-1 \times x = -1x = -x$
→ on peut enlever le nombre 1

$3 \times (x+4) = 3(x+4)$
$2 \times (3 \times x + 4) = 2(3x+4)$
→ on peut enlever les signes ×

Les calculs de bases

Rien de compliqué ici, et juste de bonnes habitudes à prendre tout de suite.

$2 \times 3x = 6x$ → on multiplie le 2 et le 3

$4x \times 5 = 20x$ → on multiplie le 4 et le 5

$x \times 6 \times 2 = 12x$ → on multiplie le 6 et le 2

⚠ $x \times x = x^2$ → un nombre multiplié par lui-même

$x + x = 2x$ → cela correspond à faire $1x + 1x$

Une particularité importante entre addition et multiplication

Avec le calcul littéral, il faudra mémoriser que les additions (ou soustractions) obéissent à des règles strictes et contraignantes. On ne peut pas additionner "*n'importe qui*" avec "*n'importe quoi*".

On PEUT calculer $3x \times 2$ → $6x$
(on multiplie le 3 et le 2).

MAIS on NE PEUT PAS calculer ou simplifier $3x + 2$
→ $3x + 2$ N'EST PAS égal à $5x$!!
(on ne peut ajouter que des termes qui se "ressemblent")

Programme de calcul et écriture littérale

Cette fiche doit vous aider à comprendre pourquoi et comment on obtient des écritures littérales.
Un *programme de calcul*, c'est tout simplement une suite d'instructions qu'il faut suivre dans l'*ordre*.

La méthode

Pour bien obtenir l'écriture littérale liée à un *programme de calcul*, je vous conseille de :

- mettre en place sur votre feuille ce *programme de calcul* en prenant un exemple numérique simple pour lequel vous écrivez les étapes de calculs qui vont amener au résulat final.
- une fois cet exemple fait, vous pouvez passer à "l'algébrisation" du programme.
  Vous partez de la lettre "x" et vous suivez, pas à pas, les mêmes étapes que l'exemple numérique sauf que, cette fois, il faudra respecter les conventions et règles du calcul littéral.

Un exemple de programme de calcul

Choisir un nombre Le multiplier par 2 Ajouter 3

* on part de 4 $\xrightarrow{\times 2}$ 8 $\xrightarrow{+3}$ 11
* on part de x et on effectue les mêmes étapes de calculs

→ on obtient : $x \xrightarrow{\times 2} 2 \times x \xrightarrow{+3} 2 \times x + 3$

Donc le programme de calcul correspond à l'écriture littérale $2 \times x + 3$, c'est à dire $2x + 3$.

Un autre exemple de programme de calcul

Choisir un nombre Soustraire 1 Multiplier le résultat par 3 Ajouter 5

* on part de 4 $\xrightarrow{-1}$ 3 $\xrightarrow{\times 3}$ 9 $\xrightarrow{+5}$ 14
* on part de x et on effectue les mêmes étapes de calculs

→ on obtient : $x \xrightarrow{-1} x - 1 \xrightarrow{\times 3} 3 \times (x-1) \xrightarrow{+5} 3 \times (x-1) + 5$

bien mettre les parenthèses

Donc le programme de calcul correspond à l'écriture littérale $3 \times (x-1) + 5$, c'est à dire $3x + 2$.
(après développement).

Comment calculer la valeur d'une écriture littérale

La méthode

Pour calculer la valeur d'une écriture littérale , il faut :

- *remplacer la lettre* (ou les lettres) par le nombre proposé.
- bien faire *apparaitre* les signes × des multiplications (signes que les conventions d'écritures nous ont permis "d'enlever" dans les écritures).
- *donner le résultat*, en ne cherchant pas forcément à écrire toutes les étapes de calculs car plus vous écrirez des calculs, plus vous augmenterez le risque d'erreur → utiliser votre calculatrice !!

*Attention, il faut bien **protéger avec des parenthèses** si on remplace par des nombres **négatifs**.*

Un exemple fondamental

Calculer l'expression $2x + 1$ pour $x = 5$

on remplace x par 5 (et on rajoute le ×).

on obtient : $2 \times 5 + 1 = 11$

Des exemples supplémentaires

→ calculer l'expression $3x - 2$ pour $x = 4$

on remplace x par 4 (et on rajoute le ×).

on obtient : $3 \times 4 - 2 = 10$

→ calculer l'expression $3x - 2$ pour $x = -6$

n'oubliez pas les parenthèses

on remplace x par (-6) et on rajoute le ×

on obtient : $3 \times (-6) - 2 = -20$

→ calculer l'expression $3(5x + 1)$ pour $x = 4$

on remplace x par 4 (et on rajoute <u>les</u> ×).

on obtient : $3 \times (5 \times 4 + 1) = 63$

→ calculer l'expression $3(5x + 1)$ pour $x = -2$

on remplace x par (-2) et on rajoute <u>les</u> ×.

on obtient : $3 \times (5 \times (-2) + 1) = -27$

→ calculer l'expression $6(3x + 5)(4x + 1)$ pour $x = 2$

on remplace x par 2 et on rajoute bien <u>tous</u> <u>les</u> ×.

on obtient : $6 \times (3 \times 2 + 5) \times (4 \times 2 + 1) = 594$

Comment calculer la valeur d'une écriture littérale : les pièges à éviter

Ces pièges sont souvent liés au fait de remplacer x par un nombre *négatif* ou par une *fraction* dans une expression s'écrivant avec x^2. Prenez de bonnes habitudes en sachant les déjouer dès maintenant !

Calculer la valeur d'une écriture s'écrivant avec x^2

a) La question " **calculer l'expression $3x^2$ pour $x = 5$** " amène trop souvent des erreurs !

Ce qu'il ne faut pas écrire
si vous écrivez $3 \times 5^2 = 15^2$ $(= 225)$ → c'est FAUX !

Ce qui est juste
il faut écrire $3 \times 5^2 = 3 \times 25 = 75$ on calcule le carré en premier !

b) La question " **calculer l'expression x^2 pour $x = -4$** " est ratée trois sur quatre !!

Ce qu'il ne faut pas écrire
si vous écrivez -4^2 $(= -16)$ → c'est FAUX !!

Ce qui est juste
il faut écrire $(-4)^2 = 16$ il faut "protéger" le négatif par des parenthèses !!

Quelques applications avec x^2

→ calculer l'expression $4x^2$ pour $x = 3$

on obtient : $4 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

→ calculer l'expression $5x^2$ pour $x = -3$

on obtient : $5 \times (-3)^2 = 5 \times 9 = 45$ bien penser aux parenthèses

→ calculer l'expression $2x^2 + 4x - 1$ pour $x = -5$

on obtient : $2 \times (-5)^2 + 4 \times (-5) - 1 = 39$ à la calculatrice !

Calculer la valeur d'une écriture quand on remplace x par une fraction

Le conseil est très simple : il faut bien mettre des parenthèses pour protéger l'ensemble de la fraction .

→ on va calculer l'expression $2x^2 + 4x - 1$ pour $x = \frac{3}{5}$

⚠ il faut écrire $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ et surtout pas $\frac{3}{5}^2$ qui n'est pas clair !

→ on obtient : $2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4 \times \frac{3}{5} - 1$

et le résultat final est égal à $\frac{53}{25}$.

Comment réduire une écriture littérale : la méthode

Cette compétence est **fondamentale** pour le calcul algébrique. Elle permettra **d'organiser** l'ensemble des calculs et des résultats. On parlera de *réduire* une expression (on fait une *réduction*), mais on pourra également utiliser le vocabulaire suivant : *ranger*, *regrouper*, *organiser*.

La méthode

Pour réduire une expression littérale, il suffit de calculer ensemble les termes qui se correspondent.

→ Réduire, c'est ranger les termes dans des "boites".

On aura, par exemple :

la ***boite*** des x^2 , dans laquelle on calcule ensemble tous les termes en x^2

la ***boite*** des x , dans laquelle on calcule ensemble tous les termes en x

la ***boite*** des "*sans x*" , dans laquelle on calcule ensemble tous les *nombres sans la lettre x*

Les opérations en jeu dans une réduction sont bien des ***additions*** *et des* ***soustractions****. Il faudra être vigilant à ne pas confondre ces calculs avec la règle des multiplications !*

Un exemple fondamental de réduction

Il doit nous servir à bien comprendre et à bien mettre en place cette compétence.

On veut réduire l'expression $A = 2x^2 + 3x + 4 + 5x^2 + 6x + 1$

→ on a $A = 2x^2 + 3x + 4 + 5x^2 + 6x + 1$

soit $A = \underbrace{2x^2 + 5x^2} + \underbrace{3x + 6x} + \underbrace{4 + 1}$) on a ORGANISÉ les boites

→ $A = 7x^2 + 9x + 5$) on a CALCULÉ les boites

Réduire une expression : des exemples pour s'entrainer

→ on veut réduire l'expression $A = 4x^2 + 3x + 2 + 8x^2 + 7x + 6$

on obtient $A = \underbrace{4x^2 + 8x^2} + \underbrace{3x + 7x} + \underbrace{2 + 6}$) on ORGANISE

→ $A = 12x^2 + 10x + 8$) on CALCULE

→ on veut réduire l'expression $A = 4x^2 + x + 2 + x^2 + x + 1$

on obtient $A = \underbrace{4x^2 + \underset{1x^2}{x^2}} + \underbrace{\underset{1x}{x} + \underset{1x}{x}} + \underbrace{2 + 1}$) on ORGANISE

→ $A = 5x^2 + 2x + 3$) on CALCULE

→ on veut réduire l'expression $A = 5x + 6y + 4z + 1 + 2x + 3y + 7z + 9$

on obtient $A = \underbrace{5x + 2x} + \underbrace{6y + 3y} + \underbrace{4z + 7z} + \underbrace{1 + 9}$) on ORGANISE

→ $A = 7x + 9y + 11z + 10$) on CALCULE

Comment réduire une écriture littérale : bien gérer les négatifs

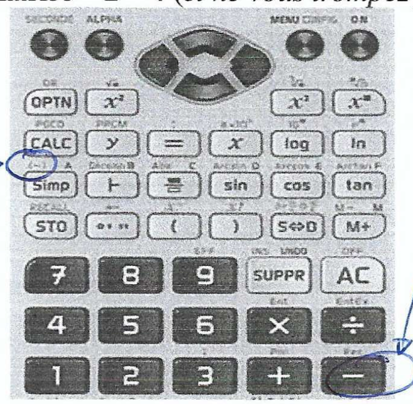
Comme toujours dans les calculs, il faudra être beaucoup plus attentif avec les ***nombres négatifs***.
On sait bien qu'ils sont une source d'erreurs et vous ferez la différence en sachant les éviter !

N'hésitez pas à utiliser votre calculatrice

Le but est bien de donner des ***résultats exacts***, C'est une évidence !!
Il est donc parfaitement inutile de faire du calcul mental pour finalement donner des résultats faux,
MAIS, par exemple, pour calculer $-2x - 4x$:

- vous devez taper sur votre calculatrice – 2 – 4 (*et ne vous trompez pas de signe " - " devant le 2*)

utiliser le "petit moins" pour taper -2 qui s'écrit en premier



utiliser le "moins" de la soustraction pour continuer le calcul avec -4

- vous obtenez – 6 , et comme on est dans la boite des x , cela fera bien $-6x$ (*il ne faut surtout pas chercher à taper la lettre x sur votre calculatrice !!*)

BILAN : on obtient bien fianlement $-2x - 4x = -6x$

Réduire une expression : les exemples avec des négatifs

→ on veut réduire l'expression $A = 7x^2 + 6x + 5 - 4x^2 - 8x - 1$

on obtient $A = \underbrace{7x^2 - 4x^2} + \underbrace{6x - 8x} + \underbrace{5 - 1}$) on ORGANISE

→ $A = 3x^2 - 2x + 4$) on CALCULE

→ on veut réduire l'expression $A = 8x^2 - 5x - 3 - 2x^2 + 9x - 2$

on obtient $A = \underbrace{8x^2 - 2x^2} \underbrace{- 5x + 9x} \underbrace{- 3 - 2}$) on ORGANISE

→ $A = 6x^2 + 4x - 5$) on CALCULE

→ on veut réduire l'expression $A = -6x^2 + 5x - 4 + 2x^2 - 8x + 5$

on obtient $A = \underbrace{-6x^2 + 2x^2} + \underbrace{5x - 8x} \underbrace{- 4 + 5}$) on ORGANISE

→ $A = -4x^2 - 3x + 1$) on CALCULE

→ on veut réduire l'expression $A = -7x^2 - 6x + 5 - x^2 - x - 1$

on obtient $A = \underbrace{-7x^2 \underbrace{- x^2}_{-1x^2}} \underbrace{- 6x \underbrace{- x}_{-1x}} \underbrace{+ 5 - 1}$) on ORGANISE

→ $A = -8x^2 - 7x + 4$) on CALCULE

Comment développer une expression : la méthode

Développer une expression, c'est passer d'un produit du type $3\times(4x+5)$ à une somme égale à $12x+15$.
Ce principe du *développement* utilise la règle de la *distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (ou par rapport à la soustraction).*
Pour s'aider à visualiser les calculs, on met souvent en place un ***système de flèches***, avec une petite phrase que l'on peut se répéter : "***une flèche = une multiplication***".

La règle générale

Pour tous nombres k, a et b, positifs ou négatifs,
on peut écrire : $k\times(a+b) = k\times a + k\times b$
"une flèche = une multiplication"

Une application : c'est le calcul de base à maitriser

On va développer $3(4x+5)$ → bien penser au × entre le 3 et la parenthèse

On obtient : $3\times(4x+5) = 3\times 4x + 3\times 5$
$= 12x + 5$

Attention ! Le résultat final est $12x + 15$, et il doit rester égal à $12x + 15$.
En effet, $12x + 15$ ne peut pas se calculer ou se simplifier. Il ne faut répondre ni 27 ni 27x !!

Quelques exemples .....

Tant que l'on travaille avec des nombres positifs, il suffit donc de faire deux multiplications.
Très rapidement, on va voir qu'il devient donc superflu d'écrire les calculs.
Attention toutefois, dans le résultat final, à bien garder la "*boite des x*" et la "*boite des sans x*" !

→ on va ici continuer à indiquer les multiplications

On va développer $2(3x+4)$
on obtient $2\times(3x+4) = 2\times 3x + 2\times 4 = 6x + 8$

On va développer $4(5x+2)$
on obtient $4\times(5x+2) = 4\times 5x + 4\times 2 = 20x + 8$

On va développer $5(2x+3)$
on obtient $5\times(2x+3) = 5\times 2x + 5\times 3 = 10x + 15$

→ on va ici écrire directement le résultat final

On va développer $6(x+2)$ → $6(x+2) = 6x + 12$

On va développer $3(4x+1)$ → $3(4x+1) = 12x + 3$

Comment développer une expression : bien gérer les négatifs

Développer une expression qui n'a que des nombres positifs pose, en général, très peu de problèmes. Espérons que cette fiche vous permettra de réussir aussi bien le travail avec des nombres négatifs.

La méthode : il y a 2 possibilités pour bien développer

Mais, quelle que soit la méthode choisie, il faudra finalement connaitre parfaitement la ***régle des signes d'une multiplication*** (cette règle est donc à revoir si nécessaire).

Première méthode : on écrit bien toutes les multiplications avec l'ensemble des termes et leur signe.
Dans cette méthode, vous mettrez au départ toujours un + entre les différentes multiplications.
→ on va ainsi développer l'expression $-6(2x-3)$

on sait que $+(+)$ correspond à $+$

On obtient : $-6 \times (2x-3) = -6 \times 2x \boxed{+} -6 \times (-3)$

$= -12x \boxed{+} +18 = -12x + 18$

Deuxième méthode : elle consiste à faire le développement en deux étapes.
L'étape 1 consiste à n'écrire que les signes des résultats des multiplications.
L'étape 2 consiste ensuite à multiplier les nombres SANS S'OCCUPER DES SIGNES.
→ on va à nouveau développer l'expression $-6(2x-3)$

$\boxed{-} \times \boxed{+}$ $\boxed{-} \times \boxed{-}$

On obtient : $-6 \times (2x-3) = - \ldots + \ldots$ (→ on a les signes)

$= -\underbrace{12x}_{6\times 2x} + \underbrace{18}_{6\times 3}$ (→ on rajoute les résultats)

Quelques exemples .....

On va, dans les premiers exemples, présenter les deux méthodes précédentes.
Et, petit à petit, on va faire les calculs "*dans la tête*" et donner directement l'expression développée finale.

On va développer $2(3x-4)$	
$2 \times (3x-4) = 2 \times 3x \boxed{+} 2 \times (-4)$ $= 6x \boxed{+} -8$ $= 6x - 8$	$2 \times (3x-4) = + \ldots - \ldots$ $= +6x - 8 = 6x - 8$

On va développer $-4(5x-2)$	
$-4 \times (5x-2) = -4 \times 5x \boxed{+} -4 \times (-2)$ $= -20x \boxed{+} +8$ $= -20x + 8$	$-4 \times (5x-2) = - \ldots + \ldots$ $= -20x + 8$

→ on va ici écrire directement le résultat final

On va développer $-5(-2x+3)$

→ on obtient $-5 \times (-2x+3) = 10x - 15$

On va développer $6(-x+2)$

→ on obtient $6 \times (-x+2) = -6x + 12$