Le vocabulaire des probabilités

Avant de savoir calculer des *probabilités*, il est indispensable de se familiariser avec le vocabulaire très spécifique de ce chapitre. Ne négligez pas cette phase dans votre apprentissage car, sinon, vous risquez de ne pas bien comprendre les consignes de vos futurs exercices de *probabilités*.

Une expérience aléatoire

Dans ce chapitre, on s'interessera au fait de calculer des probabibiltés d'une ***expérience aléatoire***.
C'est à dire que pour ces ***expériences aléaoires***, on aura des situations qui auront plusieurs "résultats" possibles sans que l'on puisse prévoir ces résultats à l'avance (il n'y a pas de "tricherie").

Exemples : Lancer un dé à six faces est une expérience aléatoire.
Tirer une boule, au hasard, dans une urne contenant des boules numérotées de 0 à 9 est une expérience aléatoire.

Et pour illustrer, avec des exemples, le vocabulaire qui va suivre,
on va utiliser l'expérience aléatoire très classique suivante :
on lance un dé à six faces et on regarde le nombre obtenu.

Une issue

Dans une expérience aléatoire, chaque "résultat" possible s'appelle une ***issue***.

Exemples
Avec cette expérience du dé à six faces, obtenir "1" est une ***issue***. Et obtenir "2" est une autre ***issue***.
On a donc ici une expérience aléatoire avec 6 ***issues*** possibles

L'univers total

En probabilité, l'ensemble de toutes les issues possibles s'appelle l'***univers***.

Exemple
Avec cette expérience du dé à six faces, l'***univers*** est constitué par l'ensemble des 6 issues possibles, c'est à dire { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }

Qu'est ce qu'un événement ?

Un ***événement*** est un ensemble d'issues. Il est constitué par une ou plusieurs issues de l'expérience aléatoire. Un ***événement*** constitué par une seule issue s'appelle un ***événement élémentaire***.

Exemples
On pourra parler de l'***événement*** "*obtenir un nombre pair*" et il a trois issues possibles { 2 ; 4 ; 6 }.
On aurait aussi l'***événement*** "*obtenir un nombre supérieur à 4*", qui a deux issues possibles { 5 ; 6 }.
L'***événement*** "*obtenir le nombre 6*" est un ***événement élémentaire*** car il n'a qu'une seule issue possible.

Un événement certain

Un ***événement certain*** est un événement dont on est sûr qu'il arrivera.
Il y a 100% de chances qu'il se produise. Profitons de ce point de vue théorique car, dans la vraie vie, cela arrive si peu d'avoir un événement certain ...

Exemple
Avec cette expérience du dé à six faces, l'***événement*** "*obtenir un nombre inférieur à 7*" est ***certain***.

Un événement impossible

Un ***événement impossible*** est un événement dont on est sûr qu'il n'arrivera pas.
Il y a 0% de chance qu'il se produise. Mais, dans la vraie vie, je ne peux que vous encourager à penser que rien n'est impossible et qu'il faut toujours se battre pour réussir...

Exemple
Avec cette expérience du dé à six faces, l'***événement*** "*obtenir le nombre 7*" est ***impossible***.

Comment calculer une probabilité : la règle de base

On va se placer, à chaque fois, dans un cas d'***équiprobabilité.*** C'est à dire que toutes les issues ont la même probabilité de se réaliser (le dé utilisé n'est pas truqué et chaque face a la même probabilité d'être obtenue, ou chaque boule dans une urne a la même probabilité d'être tirée).
De toute façon, si on n'était pas dans ce cas là, il serait très compliqué de calculer des probabilités. Car, tout simplement, comment prévoir ce qui est truqué ??

La formule générale

On appliquera la formule suivante :

$$\text{la probabilité d'un événement} = \frac{\textit{nombre d'issues favorables pour réaliser l'événement}}{\textit{nombre d'issues totales de l'univers}}$$

Cela signifie qu'il faudra bien identifier l'événement concerné, et qu'il faudra soigneusement compter ou dénombrer le nombre d'issues (de cas) qui permettent de réaliser cet événement.
→ pour calculer une probabilité, on se retrouvera très intuitivement à créer une phrase du type
" il y a ..☐.. de chances sur un total de ..☐.. d'obtenir l'événement ...." .

Quelques exemples

On lance un dé à 6 faces et on regarde le nombre obtenu
si on note A l'événement "obtenir le nombre 4", la probabilité de cet événement se note $p(A)$

→ $p(A) = \frac{1}{6}$ (il y a 1 chance sur 6 d'obtenir le nombre 4).

si on note B l'événement "obtenir un nombre pair", la probabilité de cet événement se note $p(B)$

→ $p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (il y a 3 chances sur 6 d'obtenir un nombre pair, c'est à dire 2 ou 4 ou 6).

si on note C l'événement "obtenir un nombre supérieur à 4"

→ $p(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (il y a 2 chances sur 6 d'obtenir un nombre supérieur à 4, c'est à dire 5 ou 6)

Les différentes formes du résultat

Il faudra bien respecter les énoncés, car il y a trois formes possibles pour les résultats : la forme ***fractionnaire***, la forme ***décimale*** (exacte ou approchée) ou la forme ***pourcentage*** (exacte ou approchée).
Nous allons voir ici ces trois formes , mais elles ne seront pas à écrire toutes les trois à chaque fois !

Quelques exemples

en reprenant l'événement B ci-dessus , on aurait :

pour la forme ***fractionnaire*** : $\frac{3}{6}$ (ou $\frac{1}{2}$ pour la fraction irréductible)
pour la forme ***décimale*** : 0,5
pour la forme ***pourcentage*** : 50 %

en reprenant l'événement C ci-dessus , on aurait :

pour la forme ***fractionnaire*** : $\frac{2}{6}$ (ou $\frac{1}{3}$ pour la fraction irréductible)
pour la forme ***décimale*** : environ 0,33 (valeur approchée)
pour la forme ***pourcentage*** : environ 33 % (valeur approchée)

La probabilité d'un événement contraire

Au fil des années, on se rendra compte, qu'avec les probabilités, il est souvent plus facile de passer par l'***événement contraire*** plutôt que de calculer directement la probabilité d'un événement donné.

Définition

Si on considère un événement noté A ,
alors on pourra définir son ***événement contraire*** noté $\overline{A}$.
Cet ***événement contraire*** est constitué de toutes les issues qui ne réalisent pas l'événement A .

Quelques exemples
On considère l'exemple du dé à six faces que l'on lance et pour lequel on regarde le nombre obtenu.
- si on considère l'événement "obtenir un nombre pair",
alors son ***événement contraire*** sera "obtenir un nombre impair".

- si on considère l'événement "obtenir le nombre 6",
alors son ***événement contraire*** sera "obtenir 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5".

- si on considère l'événement "obtenir un nombre supérieur 4, c'est à dire 5 ou 6",
alors son ***événement contraire*** sera "obtenir un nombre inférieur ou égal à 4, c'est à dire 1 ou 2 ou 3 ou 4"

Calcul de la probabilité d'un événement contraire

On aura deux possibilités pour calculer la probabilité d'un événement contraire :

- soit on calcule directement sa probabilité une fois que cet événement contraire est bien défini.
- soit on utilise une formule qui fait le lien entre les probabilités d'un événement et de son contraire.

Petit à petit, avec de l'expérience, vous verrez de mieux en mieux quelle sera la possibilité qui donnera les calculs les plus faciles et rapides.
En tout cas, ces formules seront utilisables quelle que soit la forme du résultat.

Avec un résultat sous forme **fractionnaire** :

Si la probabilité d'un événement A est égale à $p\,(A) = \dfrac{5}{8}$

Alors la probabilité de son contraire $\overline{A}$ est égale à $p\,(\overline{A}) = \dfrac{3}{8}$.

Le calcul à effectuer est tout simplement : $1 - \dfrac{5}{8}$.

Avec un résultat sous forme **décimale** :
Si la probabilité d'un événement A est égale à $p\,(A) = 0{,}3$
Alors la probabilité de son contraire $\overline{A}$ est égale à $p\,(\overline{A}) = 0{,}7$.
Le calcul à effectuer est tout simplement : $1 - 0{,}3$.

Avec un résultat sous forme **pourcentage** :
Si la probabilité d'un événement A est égale à $p\,(A) = 40\ \%$
Alors la probabilité de son contraire $\overline{A}$ est égale à $p\,(\overline{A}) = 60\ \%$.
Le calcul à effectuer est tout simplement : $100\ \% - 40\ \%$.

Comment calculer une probabilité : des exemples (1)

Le but de cette fiche est de croiser quelques situations classiques, et de bien voir comment on calcule concrètement la probabilité d'un événement.

Un exemple d'énoncé

Dans une urne, il y a huit boules indiscernables au toucher, qui portent chacune un numéro :

⑦⑦⑤②⑦⑥⑦④

Avant de commencer, on peut comprendre que la mention "indiscernables au toucher" nous garantit l'équiprobabilité de tirage de chacune des boules.

1) Si on tire au hasard une boule dans cette urne, quelle est la probabilité qu'elle porte le numéro 7 ?

Il y a 8 boules en tout dans l'urne.
Et il y a 4 boules avec le numéro 7.
La probabilité cherchée est donc : $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$.

2) Bruno s'apprête à tirer une boule. Il affirme qu'il a plus de chances de tirer un numéro pair qu'un numéro impair. A t'il raison ?

Il y a 5 boules avec un numéro impair et 3 boules avec un numéro pair. Bruno a donc tort car on a probabilité (pair) $= \frac{3}{8}$ et probabilité (impair) $= \frac{5}{8}$.

3) Finalement, Bruno a tiré le numéro 5 mais il ne remet pas cette boule dans l'urne. Que devient alors la probabilité de tirer un numéro impair s'il tire une nouvelle boule ?

Après avoir tiré la boule 5, il reste 7 boules en tout dans l'urne, avec seulement 4 boules impaires.
La probabilité pour une boule impaire devient : $\frac{4}{7} \approx 0,57 \approx 57\%$

4) *On va avoir ici une question de recherche. Les méthodes de résolutions sont nombreuses, et je vais juste en proposer une.* On repart de la la situation initiale

⑦⑦⑤②⑦⑥⑦④

On veut que la probabilité de tirer une boule portant le numéro 5 soit égale à 0,3.
Combien de boules avec le numéro 5 doit-on ajouter à l'urne afin d'obtenir cette probabilité ?

On veut que la probabilité de tirer un 5 soit 0,3 ou $\frac{3}{10}$.
Or, initialement, cette probabilité est égale à $\frac{1}{8}$.
Donc, en ajoutant n boules numérotées 5, on veut :

$\frac{1+n}{8+n} = \frac{3}{10}$ → on trouve $n = 2$
→ il faut ajouter 2 boules numérotées 5.

Comment calculer une probabilité : des exemples (2)

Le but de cette fiche est de croiser, à nouveau, quelques situations classiques et de bien voir comment se calcule concrètement la probabilité d'un événement.

Un exemple d'énoncé

Un bus transporte des élèves pour une compétition multisports. Il y a 10 joueurs de tennis, 12 joueurs de volley-ball et 18 joueurs de football. Lors d'un arrêt, on s'intéresse aux sportifs qui sortent du bus.

1) Quelle est la probabilité que le premier sportif à sortir soit un joueur de tennis ?

Il y a 40 sportifs en tout dans le bus (10 + 12 + 18).
Et il y a 10 joueurs de tennis.
La probabilité cherchée est donc : $\frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$.

2) Quelle est la probabilité que le premier sportif à sortir soit un joueur de volley ou de football ?

Il y a 30 joueurs de volley ou de football (12 + 18).
La probabilité cherchée est donc : $\frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$.
On aurait aussi pu utiliser l'événement contraire de la question 1.

3) En considérant que l'on vient de voir deux joueurs de tennis sortir du bus, quelle est la probabilité que le sportif suivant qui sorte soit un joueur de tennis ?

Après la sortie de ces 2 joueurs de tennis, il en reste 8 pour un nombre total de sportifs égal à 38.
La probabilité cherchée est donc : $\frac{8}{38} = \frac{4}{19} \approx 0,21 \approx 21\%$.

4) *On va avoir ici une question de recherche. Les méthodes de résolutions sont nombreuses, et je vais juste en proposer une.*
On considère, à nouveau, que tous les sportifs du début sont dans le bus. Il fait un arrêt lors duquel un groupe de nageurs monte dans le bus. A l'arrêt suivant, la probabilité que ce soit un nageur qui descende du bus en premier est de $\frac{1}{5}$, déterminer le nombre de nageurs présents dans le bus ?

On ajoute n nageurs dans le bus et donc le nombre total de sportifs est égal à $40 + n$.
On veut donc : $\frac{n}{40+n} = \frac{1}{5}$ or on a $\frac{1}{5} = \frac{10}{50}$

On trouve donc $n = 10$
→ il y a 10 nageurs dans le bus.

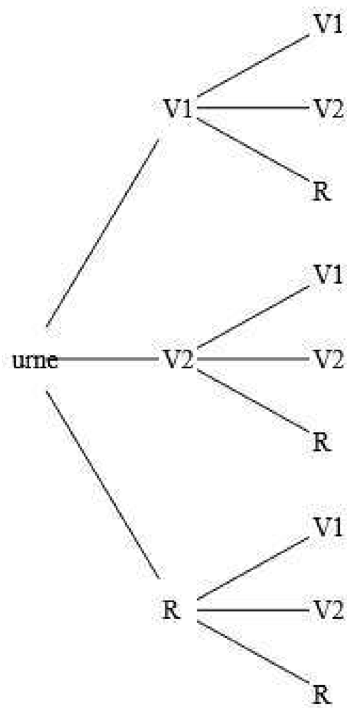
Comment utiliser un arbre de probabilité : la méthode avec un exemple

Lorsque l'on aura une situation pour laquelle il y a plusieurs *événements successifs* (qui arrivent l'un après l'autre) ou le même événement se reproduisant *plusieurs fois de suite*, il va être très utile de visualiser la situation à l'aide d'un *arbre de probabilité*.
Une fois construit, cet *arbre* vous permettra sans souci de calculer les probabilités demandées.

Un exemple d'énoncé

On imagine une urne dans laquelle il y a 3 jetons : 2 jetons verts et 1 jeton rouge.
On tire au hasard un jeton dans cette urne .
On note sa couleur et on remet ce jeton dans l'urne (on parlera d'un tirage AVEC remise).
On tire une deuxième fois un jeton et on note également sa couleur.
Quelle est la probabilité que les deux jetons tirés soient de la même couleur ?

On réalise l'arbre de probabilité suivant. Il va résumer les possibilités de ces tirages successifs.



→ pour le tirage du premier jeton, on visualise bien les trois tirages possibles avec le premier jeton vert noté V1 , le deuxième jeton vert noté V2 et le jeton rouge noté R.
→ puis, comme on remet le jeton après ce premier tirage, le deuxième tirage se déroule dans les mêmes conditions avec, à chaque fois, les trois mêmes possibilités.

Le nombre total de tirages est égal à 9 . On le voit avec les 9 branches en "*sortie*" de l'arbre *à droite*.
Parmi ces 9 tirages possibles, il n'y en a que 5 qui permettent d'avoir des jetons de même couleur :
V1 et V1 ; V1 et V2 ; V2 et V1 ; V2 et V2 ; R et R

La probabilité d'avoir deux jetons de même couleur est donc égale à : $\frac{5}{9} \approx 0,56 \approx 56$ %

Si vous souhaitez vous tester avec le même type de consignes, en plus compliquées, vous avez des fiches disponibles dans la partie "Seconde".

Comment utiliser un arbre de probabilité : un autre exemple

Ce qui est intéressant dans l'exercice qui va suivre est qu'il commence avec des probabilités plutôt classiques et faciles, puis, pour la deuxième partie, le fait de réaliser *un arbre de probabilité* va nous permettre de bien répondre à la dernière question.

Un exemple d'énoncé

1) *Bruno, en week-end dans une station de ski, se trouve tout en haut de la station. Il a en face de lui la possibilité de prendre deux pistes noires ou deux pistes rouges ou une piste bleue. Ces pistes lui permettent de rejoindre un restaurant d'altitude où il veut s'arrêter. Il décide de choisir une piste au hasard. Quelle est la probabilité que la piste qu'il choisisse soit une piste rouge ?*

Bruno a, en face de lui, 2 pistes rouges.
Et il y a un total de 5 pistes (2 + 2 + 1).
La probabilité cherchée est donc $\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\,\%$.

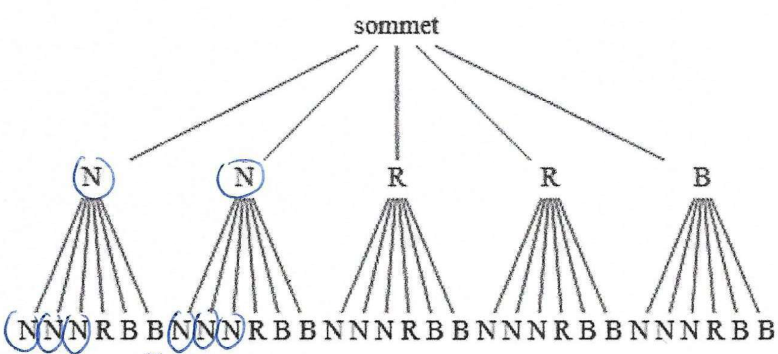
2) *Après sa pause, il part du restaurant où cette fois il a la possibilité de prendre trois pistes noires ou une piste rouge ou deux pistes bleues. Quelle est la probabilité qu'il choisisse alors une piste bleue ?*

Cette fois, Bruno a 2 pistes bleues en face de lui.
Et il y a cette fois un total de 6 pistes (3 + 1 + 2).
La probabilité cherchée est donc $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33 \approx 33\,\%$.

3) *Une fois en bas de la station, Bruno décide de remonter tout en haut de la station et d'enchainer cette fois la descente jusqu'en bas. Quelle est la probabilité qu'il enchaine cette fois-ci deux pistes noires ?*

→ on va utiliser ici un arbre de probabilité pour bien visualiser toutes les possibilités.

voici les 6 possibilités d'enchainement de 2 pistes noires



→ en partant du sommet, on fait apparaitre les 5 possibilités de pistes (avec les deux noires N, les deux rouges R et la bleue B).
→ et, pour chacune de ces pistes, on fait apparaitre les 6 choix possibles à partir du restaurant (avec les trois noires N, la rouge R et les deux bleues B).
→ le nombre total d'enchainements est donc égal à $5 \times 6 = 30$. On le voit avec les 30 branches en "*sortie*" d'arbre. Parmi ces 30 possibilités, il n'y en a que 6 qui permettent d'enchainer deux pistes noires N et N.

La probabilité d'enchainer deux pistes noires est donc égale à : $\frac{6}{30} = 0{,}2 = 20\ \%$

Si vous souhaitez vous tester avec le même type de consignes, en plus compliquées, vous avez des fiches disponibles dans la partie "Seconde".

Comment calculer des probabilités dans un tableau

Le but de cette fiche est de vous familiariser avec les calculs de probabilités au sein d'un *tableau à double entrée* (qu'il faudra d'abord savoir soigneusement compléter).

Un exemple d'énoncé

Dans la vitrine d'un magasin, il y a, au total, 45 modèles de chaussures présentés. Certaines de ces chaussures sont conçues pour la ville et d'autres pour le sport. Elles peuvent être de trois couleurs différentes : noire , blanche ou marron.

1) Compléter le *tableau à double entrée* suivant qui récapitule les différentes possibilités.

① 20 − 5 ③ 18 − (5 + 3)

Modèle	Pour la ville	Pour le sport	***Total***
Noir	15	5	20
Blanc	7	10	17
Marron	5	3	8
Total	27	18	45

② 45 − 27 ④ 7 + 10

Le tableau se remplit à l'aide d'additions ou de soustractions. Attention à l'ordre, certaines cases ne peuvent pas se remplir avant d'autres.

2) On chosit un modèle de chaussures au hasard dans cette vitrine.

a) Quelle est la probabilité de choisir un modèle de couleur noire ?

Il y a 20 modèles noires sur un total de 45 modèles.
La probabilité cherchée est : $\frac{20}{45} = \frac{4}{9} \approx 0,44 \approx 44\%$.

b) Quelle est la probabilité de choisir un modèle pour le sport ?

Il y a 18 modèles pour le sport sur un total de 45 modèles.
La probabilité cherchée est : $\frac{18}{45} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$.

c) Quelle est la probabilité de choisir un modèle pour la ville ***et*** qui soit de couleur blanche ?

c'est le mot important ici !

La probabilité cherchée correspond à $P(\text{ville} \cap \text{Blanc})$.
Il faut considérer les 7 modèles qui sont à l'intersection de "pour la ville" et de "Blanc" → c'est la case grisée !
La probabilité cherchée est : $\frac{7}{45} \approx 0,16 \approx 16\%$.

3) Finalement, on se décide de prendre un modèle prévu pour la ville.
Parmi ces chaussures, quelle est la probabilité de choisir un modèle de couleur blanche ?

c'est le mot important ici !!

On ne doit regarder que la colonne avec les 27 modèles pour la ville.
Parmi ces 27 modèles, il y en a 7 qui sont blancs.
La probabilité cherchée est : $\frac{7}{27} \approx 0,26 \approx 26\%$.

$\boxed{\text{on ne divise plus par 45 mais par 27}}$