Les intervalles de fluctuation - seuil , risque , centré (ou bilatéral)

On a, à nouveau, une notion très simple, une fois franchi le cap du vocabulaire initial. Il s'agira, encore, de calculer des probabilités du type $P(X \leqslant ....)$: avec **binomFRep** sur la Ti-83 Premium par exemple.

Définition d'un intervalle de fluctuation

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $B(n\,;p)$.
On rappelle que parler d'un "seuil de 95 %" et d'un "risque 5 %" est équivalent.
Un intervalle $[a\,;b]$ sera un ***intervalle de fluctuation au seuil de 95 %*** (ou au risque de 5%) si la variable aléatoire X nous permet de vérifier l'inégalité $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0{,}95$.

On va passer assez vite sur ces intervalles (qui représentent une généralité) car, en pratique, on va s'intéresser à ceux qui ont une particularité : les ***intervalles de fluctuation centrés***.

Intervalle de fluctuation centré

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $B(n\,;p)$. Et on suppose avoir trouver un ***intervalle de fluctation au seuil de 95 %*** → on a donc a et b tel que $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0{,}95$.
L'intervalle $[a\,;b]$ sera un ***intervalle de fluctuation centré*** si les 5% ne vérifiant pas le seuil se répartissent équitablement avec 2,5% d'un côté (pour $X < a$) et 2,5% de l'autre (pour $X > b$).
Concrètement, il faudra ici juste calculer deux probabilités et vérifier que :

$$P(X < a) \leqslant \frac{0{,}05}{2} \text{ soit } P(X < a) \leqslant 0{,}025$$

$$P(X > b) \leqslant \frac{0{,}05}{2} \text{ soit } P(X > b) \leqslant 0{,}025$$

Ces 2 conditions sont *nécessaire et suffisante* pour avoir un ***intervalle de fluctuation centré ou bilatéral***.

Exemples

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(109\,;0{,}24)$.
L'intervalle $[18\,;35]$ est-il un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % ?

On doit vérifier : $P(X < 18) \leqslant \frac{0{,}05}{2}$ soit $P(X < 18) \leqslant 0{,}025$
et $P(X > 35) \leqslant \frac{0{,}05}{2}$ soit $P(X > 35) \leqslant 0{,}025$

On a : $p(X < 18) = p(X \leqslant 17) \approx 0{,}022$ ($\leqslant 0{,}025$)
$p(X > 35) = 1 - p(X \leqslant 35) \approx 0{,}021$ ($\leqslant 0{,}025$)
→ c'est bien un intervalle de fluctuation centré.

On considère une variable aléatoire X qui suit la même loi binomiale $B(109\,;0{,}24)$.
L'intervalle $[14\,;34]$ est-il un intervalle de fluctuation centré au risque 1 % ?

→ *on parle ici de "risque 1%", et on sait que cela signifie également "seuil de 99%".*

On doit vérifier : $P(X < 14) \leqslant \frac{0{,}01}{2}$ soit $P(X < 14) \leqslant 0{,}005$
et $P(X > 34) \leqslant \frac{0{,}01}{2}$ soit $P(X > 34) \leqslant 0{,}005$

On a : $p(X < 14) = p(X \leqslant 13) \approx 0{,}001$ ($\leqslant 0{,}005$)
$p(X > 34) = 1 - p(X \leqslant 34) \approx 0{,}034$ ($> 0{,}005$!!)
→ ce n'est pas un intervalle de fluctuation centré.