Corrigé du sujet 2

de l'épreuve de mathématiques

Bac Spécialité Maths

Métropole 15 Mars 2021
(annulée pour cause de Covid)

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 : Les bonnes réponses pour ce QCM sont :

1.d   2.b   3.d   4.b   5.a

Voici quelques explications

pour les 3 premières questions, on applique une loi binomiale $\mathcal{B}(9\,;\,0{,}03)$ X représente le nombre de messages illisibles

Question 1 : on cherche $P(X=0)$ → binomFdp
→ on obtient environ 0,76 → réponse d

Question 2 : on applique la formule du cours pour $P(X=2)$

$$\rightarrow \binom{9}{2} \times 0{,}03^2 \times (1-0{,}03)^{9-2}$$

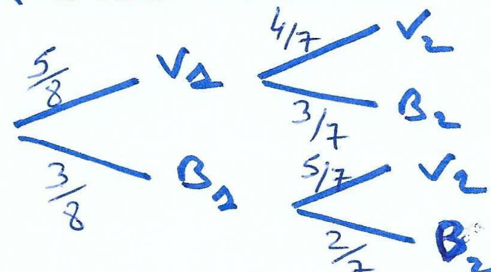
$$\rightarrow \binom{9}{2} \times 0{,}03^2 \times 0{,}97^7 \rightarrow \text{réponse b}$$

2 succès et 7 échecs !

Question 3 : on cherche $p(X \geq 1)$ et on sait que
$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$ → réponse d

pour les 2 dernières questions, on a un tirage SANS remise → si on tire une boule verte, il ne reste que 7 boules (4 vertes et 3 blanches).

On obtient l'arbre suivant :



Question 4 : il reste donc 4 boules vertes sur un total de 7 boules → $P_{V_1}(V_2) = \frac{4}{7}$ → réponse b

Question 5 : Formule des probabilités totales

$$\rightarrow p(V_2) = p(V_2 \cap B_1) + p(V_2 \cap V_1)$$

$$= \frac{5}{7} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{7} \times \frac{5}{8}$$

$$= \frac{35}{56} = \frac{5}{8} \rightarrow \text{réponse a}$$

Exercice 2

① ⓐ on a $U_1 = U_0 + V_0 = 1 + 1 = 2$

$V_1 = 2U_0 + V_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$

ⓑ on calcule $V_{n+1} - V_n = 2U_n + \cancel{V_n} - \cancel{V_n} = 2U_n$

or on sait que, pour tout n, $U_n > 0$

Donc $V_{n+1} - V_n > 0 \rightarrow (V_n)$ est strictement croissante.

De plus, on sait que $V_0 = 1$

Et donc, pour tout n, on aura $V_n \geq 1$.

ⓒ Initialisation :

on a $U_0 = 1$ Donc on a bien $U_0 \geq 0 + 1$

soit $1 \geq 1$ OK

Hérédité : on suppose $U_n \geq n+1$

Montrons que $U_{n+1} \geq (n+1) + 1$

soit $U_{n+1} \geq n+2$

On part de $U_n \geq n+1$

$\rightarrow U_n + V_n \geq V_n + n + 1$

car $V_n \geq 1$

$\rightarrow U_{n+1} \geq V_n + n + 1 \geq 1 + n + 1$

soit $U_{n+1} \geq n+2$ → c'est bon !

ⓓ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$

Donc, avec $U_n \geq n+1$ et le théorème de comparaison,

on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

② ⓐ $(-1)^{n+1}$ prend les valeurs -1 ou 1 ....

→ on sait que l'on peut donc écrire

$$-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$$

et on divise par U_n^2 qui est strictement positif

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

ⓑ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

et, en appliquant le théorème des gendarmes,

on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{U_n^2} = 0$

c) on a $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{U_n^2}$ qui tend vers 0 !

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n^2 = 2$

Or, (r_n) est une suite à termes positifs car $r_n = \dfrac{V_n}{U_n}$ positif / positif

On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \sqrt{2}$.

d) On a : $r_{n+1} = \dfrac{V_{n+1}}{U_{n+1}} = \dfrac{2U_n + V_n}{U_n + V_n} = \dfrac{\cancel{U_n}\left(2 + \frac{V_n}{U_n}\right)}{\cancel{U_n}\left(1 + \frac{V_n}{U_n}\right)}$ r_n

soit $r_{n+1} = \dfrac{2 + r_n}{1 + r_n}$

e) ce programme est "tellement" classique avec sa boucle "tant que" !

→ le nombre affiché correspond au rang à partir duquel l'écart entre la suite (r_n) et sa limite $\sqrt{2}$ devient inférieur ou égal à 10^{-4} (soit 0,0001).

NB : on aura donc une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 0,0001 près !!

Exercice 3 : (exercice très classique ici !)

① ⓐ on montre que $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs (non colinéaires) du plan (ABC)

→ on utilise le produit scalaire !

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0-2 \\ 3-0 \\ 0-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} = 3\times(-2) + 2\times 3 + 6\times 0 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = 3\times(-2) + 2\times 0 + 6\times 1 = 0$$

Donc on a bien $\vec{n} \perp \vec{AB}$ et $\vec{n} \perp \vec{AC}$ soit $\vec{n} \perp (ABC)$.

ⓑ L'équation cartésienne de (ABC) s'écrivee donc :

$$3x + 2y + 6z + d = 0$$

car le vecteur normal nous donne a, b et c !!

pour trouver d, on utilise, par exemple, le point A qui appartient à (ABC) → $3\times \underset{x_A}{2} + 2\times \underset{y_A}{0} + 6\times \underset{z_A}{0} + d = 0$

On obtient $d = -6$ soit $3x + 2y + 6z - 6 = 0$

② ⓐ $\vec{n}$ sera donc un vecteur directeur de cette droite

On aura donc : $(d) \begin{cases} x = \boxed{0} + \boxed{3}t = 3t \\ y = \boxed{0} + \boxed{2}t = 2t \\ z = \boxed{0} + \boxed{6}t = 6t \end{cases}$

point O ; vecteur directeur

ⓑ on "met" la droite "dans" le plan

→ $3\times(3t) + 2\times(2t) + 6\times(6t) - 6 = 0$

→ $9t + 4t + 36t - 6 = 0 \rightarrow 49t - 6 = 0 \rightarrow t = \frac{6}{49}$

et en remplaçant dans la représentation de (d),

on obtient $\begin{cases} x = 3\times\frac{6}{49} = \frac{18}{49} \\ y = 2\times\frac{6}{49} = \frac{12}{49} \\ z = 6\times\frac{6}{49} = \frac{36}{49} \end{cases}$

(c) on applique $OH = \sqrt{(x_H - x_O)^2 + (y_H - y_O)^2 + (z_H - z_O)^2}$

avec $x_O = y_O = z_O = 0$

$\rightarrow OH = \sqrt{\left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{12}{49}\right)^2 + \left(\frac{36}{49}\right)^2} = \frac{6}{7}$

(3) on peut prendre OAB comme base, avec sa hauteur [OC]

ou on peut prendre ABC comme base, avec sa hauteur [OH]

On aura : $V = \frac{1}{3} \times \underbrace{\text{Aire } OAB}_{\text{↳ aire d'un triangle rectangle !}} \times OC = \frac{1}{3} \times \text{Aire } ABC \times OH$

On en déduit : $\text{Aire } OAB \times OC = \text{Aire } ABC \times OH$

$\rightarrow \left(\frac{2 \times 3}{2}\right) \times 1 = \text{Aire } ABC \times \frac{6}{7}$

$\rightarrow 3 = \text{Aire } ABC \times \frac{6}{7}$

soit $\text{Aire } ABC = 3 : \frac{6}{7} = \frac{21}{6} = \boxed{\frac{7}{2}}$

Exercice au choix → exercice A

① ⓐ on résout $f(x)=g(x) \rightarrow x^2e^{-x}=e^{-x}$

$\rightarrow x^2 = 1$ (car $e^{-x} \neq 0$)

$\rightarrow x=-1$ ou $x=1$

et en remplaçant dans f ou dans g, on obtient :

$(-1\,;e^1)$ soit $(-1\,;e)$ et $(1\,;e^{-1})$

ⓑ on fait le tableau de signes de $f(x)-g(x)$.

→ on a $f(x)-g(x) = x^2e^{-x}-e^{-x} = e^{-x}(x^2-1)$.

On en déduit (assez facilement) :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bilan : sur $]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus ...

sur $[-1\,;1]$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous ....

② ⓐ on applique la formule $(uv)' = u'v+uv'$ pour donner la dérivée de x^2e^{-x}.

$\rightarrow (x^2e^{-x}) = \underbrace{2x}_{u'} \times \underbrace{e^{-x}}_{v} + \underbrace{x^2}_{u} \times \underbrace{(-e^{-x})}_{v'}$

on a : $d'(x) = -e^{-x} - (2xe^{-x} - x^2e^{-x})$

⚠ méfiance !

$\rightarrow d'(x) = -e^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = e^{-x}(x^2-2x-1)$

ⓑ on cherche donc le signe de $d'(x)$

soit le signe de x^2-2x-1

$\rightarrow \Delta = b^2-4ac = \dots = 8$

on obtient deux racines : $x_1 = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = 1+\sqrt{2}$

cette racine n'appartient pas à $[-1\,;1]$!

On obtient :

x	-1		$1-\sqrt{2}$		1
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$	|	$+$	
$d'(x)$		$+$	0	$-$	
$d(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ⓒ La distance sera maximale en $x_0 = 1-\sqrt{2}$

et on aura $d_{max} = d(1-\sqrt{2}) = e^{-(1-\sqrt{2})} - (1-\sqrt{2})^2 e^{-(1-\sqrt{2})}$

$\leadsto d_{max} \simeq 1{,}3$.

③ Le seul intérêt semble être l'utilisation d'un TVi.

On cherche les intersections entre Δ et $\mathcal{C}_g$,

soit on cherche $y(x) = g(x)$

ce qui correspond à $h(x) = 0$

or, il est impossible de résoudre directement l'équation

$e^{-x} - x - 2 = 0$!

Donc on va étudier $h \rightarrow h'(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{<0} \underbrace{-1}_{<0} < 0$

On obtient le tableau :

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

(pas de forme indéterminée)

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

La fonction étant continue et décroissante, on obtient l'unicité de la solution, par application du corollaire du TVi, car le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty ; +\infty[$

$\leadsto$ il y a un unique point d'intersection !

Exercice au choix → exercice B

Partie B : ① aucune forme indéterminée pour les limites

en $+\infty$, on a une limite du type $+\infty + \infty - 2 \to +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

en 0^+, on a une limite du type $-\infty + 0 - 2 \to -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

② on calcule $g'(x) = \frac{1}{x} + 2\ (>0)$ car on a $x > 0$

on obtient le tableau

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

③ on applique le TVI !

La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty;+\infty[$

Donc, avec le corollaire du TVI, on peut affirmer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution sur $]0;+\infty[$ → on note $\boxed{a}$ cette solution.

④ on calcule $g(1) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} + 2 \times 1 - 2 = 0$

Donc l'unique solution est égale à 1 en fait.

On a alors :

x	0		1		$+\infty$
variations de g	$-\infty$	$\nearrow$ $\boxed{-}$	0	$\nearrow$ $\boxed{+}$	$+\infty$
Signes de g		$\boxed{-}$	0	$\boxed{+}$	

Partie II : 1) a) on applique $(uv)' = u'v + uv'$

avec $u(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right) \rightarrow u'(x) = 0 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$

$v(x) = (\ln x - 1) \rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

On obtient :

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 1) + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x - 1 + 2x - 1}{x^2}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{\ln x + 2x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) x^2 étant positif, le signe de f' ne dépend que du signe de $g(x)$ (que l'on a dans la partie précédente).

On obtient :

x	0		1		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

2) $f(x)$ s'écrit comme un produit de facteurs, qui est nul si l'un de ses facteurs est nul.

on aura : $\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 0$ ou $(\ln x - 1) = 0$

d'

$\frac{1}{x} = 2$ ou $\ln x = 1$

$\rightarrow x = \frac{1}{2}$ $\quad$ $x = e^1 = e$

Et en plaçant ces nombres dans le tableau de variations de f, on va en déduire ses signes.

x	0		$\frac{1}{2}$		1		e		$+\infty$
$f(x)$		$\boxed{+}$ ↘	0	↘	$\boxed{-}$	↗	0	↗ $\boxed{+}$	
signe de f		$+$	0		$-$		0	$+$	

__Partie III__ : ① La dérivée de F est égale à f dont on vient de donner les signes !

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
signes de $F' = f$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de F		↗		↘		↗	

② on veut $F'(x) = 0$ (tangentes "horizontales")

→ on aura ces tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points d'abscisse $\frac{1}{2}$ ou e car on a $F'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $F'(e) = 0$.