Epreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli
Loi binomiale

La définition d'une épreuve de Bernoulli

Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles.
L'une de ces issues sera appelée "*Succès*" , avec une probabilité associée égale à $\boldsymbol{p}$.
La deuxième issue sera appelée "*Echec*" avec une probabilité alors égale à $(\boldsymbol{1-p})$.

Exemples :
- on lance un dé à six faces. L'événement "*obtenir un nombre pair*" pourrait correspondre à "*Succès*" et l'événement "*obtenir un nombre impair*" correspondrait donc à "*Echec*".
- dans l'industrie, si on fabrique des pièces métalliques, on peut considérer l'événement "*la pièce est sans défaut*" comme "*Succès*" et l'événement "la *pièce est avec un défaut*" correspondrait donc à "*Echec*".

La définition d'un schéma de Bernoulli

Si on répète un certain nombre de fois (*n fois*) une *épreuve de Bernoulli* de façon identique et indépendante , alors on obtient un *schéma de Bernoulli.*
Ces épreuves doivent bien se dérouler de façon identique (toujours dans les mêmes conditions) et de façon indépendante (le résultat obtenu sur une épreuve n'a aucune influence sur le résultat de l'épreuve suivante). Ainsi, les probabilités de succès et d'échec ***restent les mêmes*** pour chacune des épreuves.

Exemples :
- on lance un dé à six faces 20 fois de suite. Chaque lancer se réalise de façòn identique (le dé ne se déforme pas, il reste le même) et indépendante (le résultat d'un lancer n'a aucune influence sur le résultat du lancer suivant).
- on effectue un tirage AVEC REMISE d'une boule dans une urne. Puisque l'on remet à chaque fois la boule tirée, les conditions sont inchangées et on aura bien des épreuves identiques et indépendantes.

La définition d'une loi binomiale

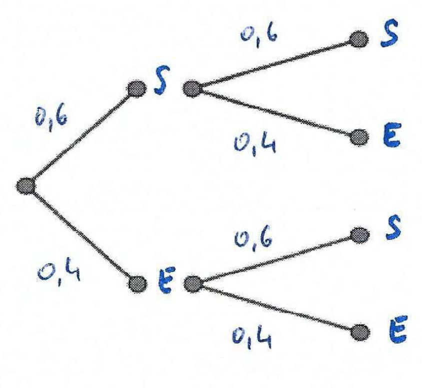
La *loi de probabilité* liée à une variable aléatoire X, s'intéressant au nombre de succès d'un schéma de Bernoulli à *n* épreuves, s'appelle une ***loi binomiale***.

Une *loi binomiale* se définit avec *deux paramètres* :
n qui est le nombre d'épreuves réalisées, et ***p*** qui est la probabilité de succès.
On écrira alors la loi binomiale sous la forme : $\boldsymbol{B(n\,;p)}$.

Visualisation avec un arbre de probabilité

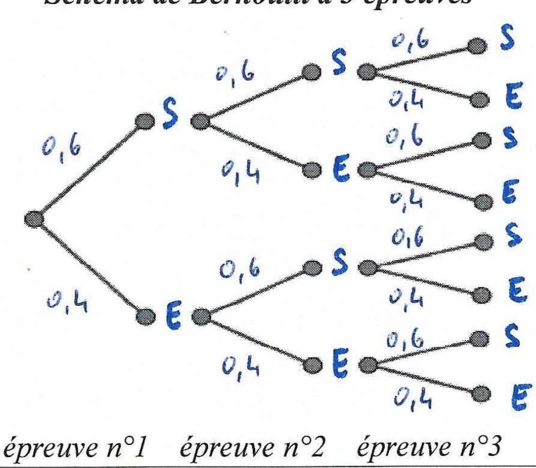
On va réaliser un arbre de probabilité d'un schéma de Bernoulli avec $n = 2$ épreuves, puis $n = 3$ épreuves.
On considèrera ici une probabilité de succès $p = 0{,}6$ et donc une probabilité de l'échec $(1-p) = 0{,}4$.

Schéma de Bernoulli à 2 épreuves



épreuve n°1 *épreuve n°2*

Schéma de Bernoulli à 3 épreuves



épreuve n°1 *épreuve n°2* *épreuve n°3*

La loi binomiale : quelques exemples

Cette fiche va servir à croiser des exemples de *loi binomiale*. Cela devrait vous permettre de bien vous habituer à reconnaitre cette loi dans les énoncés , et surtout à bien identifier les paramètres ***n*** et ***p***.

Exemple 1

Un sac contient 6 boules bleues et 4 boules rouges.
On tire ***successivement*** et ***avec remise*** trois boules .
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

On a un tirage AVEC remise → chaque tirage se fait dans les mêmes conditions et de façon indépendante.
Il y a 2 issues possibles : "rouge" ou "bleu"
→ on a donc une loi binomiale $\mathcal{B}(3 ; 0,4)$
avec $n = 3$ (on fait 3 tirages)
et $p = 0,4$ (probabilité de tirer une boule rouge).

Exemple 2

Une chaine de production fabrique 10 000 chemises par jour. La probabilité pour qu'une chemise soit considérée sans défaut est 0,9. On extrait de cette production successivement 10 chemises.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de chemises sans défaut dans cet échantillon de taille 10.

On peut assimiler cette situation à un tirage AVEC remise de 10 chemises parmi les 10 000.
Il y a 2 issues possibles : "sans défaut" ou "avec défaut"
→ on a donc une loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,9)$
avec $n = 10$ et $p = 0,9$.

Exemple 3 (d'après Bac S Centres étrangers 2019)

Une étude statistique a établi qu'un client sur quatre pratique le surf.
Dans une télécabine accueillant 80 clients de la station, on cherche la probabilité qu'il y ait exactement 20 clients pratiquant le surf.

On peut assimiler cette situation à un tirage AVEC remise de 80 clients parmi l'ensemble des clients.
Il y a 2 issues possibles : "surf" ou "pas surf"
→ on a donc une loi binomiale $\mathcal{B}(80 ; 0,25)$
avec $n = 80$ et $p = 0,25$ (un quart !)
et on cherchera $p(X = 20)$.

Comment calculer une probabilité du type P (x =...) avec une loi binomiale

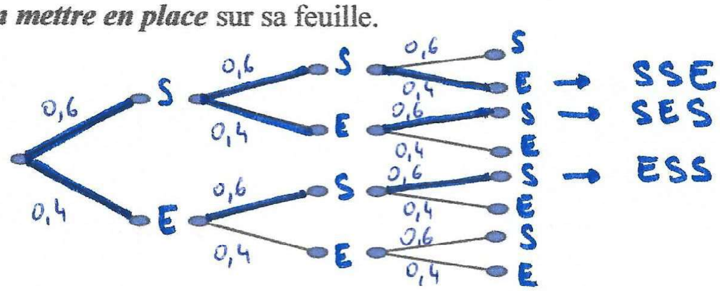
Pour calculer ces probabilités, il y a ***trois possibilités***. Très rapidement, on utilisera exclusivement la dernière qui n'utilise que la calculatrice mais il est nécessaire de comprendre d'où viennent les résultats.

Un exemple d'énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n = 3 et p = 0,6.
On cherche à calculer P (x = 2) , c'est à dire la probabilité d'obtenir exactement 2 succès sachant que l'épreuve a été répétée 3 fois.

Calcul de la probabilité "à la main"

Cela *serait* la meilleure méthode , car la plus compréhensible et la plus facile.
MAIS, dans la pratique , on va comprendre que faire un arbre de probabilité pour plus de 4 épreuves est ***impossible à proprement et bien mettre en place*** sur sa feuille.



On a surligné les chemins permettant d'obtenir exactement 2 succès.

On a : $P(x=2) = 0{,}6\times0{,}6\times0{,}4 + 0{,}6\times0{,}4\times0{,}6 + 0{,}4\times0{,}6\times0{,}6$
$= 0{,}432$

Calcul avec la formule utilisant les coefficients binomiaux

La formule générale s'écrit : $P(x=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

avec n : nombre total d'épreuves
k : nombre de succès
p : probabilité du succès

On applique cette formule à l'exemple de cette fiche.

$P(x=2) = \binom{3}{2}\times 0{,}6^2\times(1-0{,}4)^{3-2} = \binom{3}{2}\times0{,}6^2\times0{,}4^1$

On peut vérifier que le coefficient binomiale correspond au nombre de chemins permettant d'avoir 2 succès. Mais, ***ce coefficient se calcule à la calculatrice***. Par exemple , avec la Ti-83 Premium, on tapera successivement sur ***math - PROB - Combinaison*** et on affichera $_3C_2$.

On a : $\binom{3}{2} = {}_3C_2 = 3 \rightarrow p(x=2) = \underbrace{3}_{\text{nombre de chemins}}\times0{,}6^2\times0{,}4^1 = 0{,}432$

Calcul à la calculatrice avec l'instruction "BinomFdp"

Il vous faut mémoriser les touches qui concernent VOTRE calculatrice.
Si on prend l'exemple de la Ti-83 Premium, on tapera successivement sur ***2nde ; distrib ; BinomFdp*** et on complète l'affichage de l'écran :

nbreEssais : 3
p : 0,6
Valeur de x : 2

On obtient directement $p(x=2) = 0{,}432$

Comment calculer une probabilité du type P (x⩽...) avec une loi binomiale

On va ici utiliser la calculatrice avec une instruction très spécifique (***binomFrep***).
Mais il faudra être très vigilant au fait que la calculatrice est programmée pour répondre à la question "P (x ⩽...)" et il faudra adapter son travail si l'énoncé demande, par exemple, de calculer "P (x >...)".

Un exemple d'énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}6$.
On cherche à calculer $P (x \leqslant 4)$, c'est à dire la probabilité d'obtenir entre 0 et 4 succès sachant que l'épreuve a été répétée 10 fois.

Calcul à la calculatrice avec l'instruction "BinomFrep"

On va, pour ce type d'énoncé, écarter tout de suite les calculs "à la la main".
Et, il serait très peu efficace (même si c'est possible) d'utiliser l'instruction "*BinomFdp*" pour calculer (et additionner) les probabilités $P (x = 0)$, $P (x = 1)$, $P (x = 2)$, $P (x = 3)$ et $P (x = 4)$.

Du coup, le plus efficace est d'utiliser l'instruction "***BinomFrep***" qui fait directement l'ensemble des calculs qui concernent le fait d'avoir entre 0 et 4 succès.
En prenant l'exemple de la Ti-83 Premium, on tapera successivement sur ***2nde*** ; ***distrib*** ; ***BinomFRep*** et on complète l'affichage de l'écran :

nbreEssais : 10
p : 0,6
Valeur de x : 4

On obtient : $P(x \leqslant 4) \approx 0{,}1662$

Comment bien adapter son calcul par rapport à l'énoncé

L'instruction "***Binomfrep***" ne répond qu'à la question $P (x \leqslant ...)$, soit "**inférieur ou égal**". Mais les énoncés vont souvent demander une probabilité d'un autre type et il faudra bien adapter vos calculs !
On va garder, pour les exemples ci-dessous, les paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}6$. Vous n'hésiterez pas à vérifier que vous obtenez bien les bons résultats numériques !

Si l'énoncé demande calculer $P (x < 7)$, cela signifie "entre 0 et 6 succès" → on cherche donc $P (x \leqslant 6)$ et ***on utilise binomFrep avec Valeur de x : 6*** On obtient : $P(x<7) = p(x \leqslant 6) \approx 0{,}6177$
Si l'énoncé demande calculer $P (x > 5)$, cela signifie "entre 6 et 10 succès" → on doit utiliser l'événement contraire qui est $P (x\leqslant 5)$ et ***on utilise binomFrep avec Valeur de x : 5*** puis on calcule : $1 - P (x \leqslant 5)$. on obtient : $P(x>5) = 1 - p(x \leqslant 5) \approx 0{,}6331$
Si l'énoncé demande calculer $P (x \geqslant 7)$, cela signifie "entre 7 et 10 succès" → on doit utiliser l'événement contraire qui est $P (x\leqslant 6)$ et ***on utilise binomFrep avec Valeur de x : 6*** puis on calcule : $1 - P (x \leqslant 6)$. On obtient : $P(x \geqslant 7) = 1 - p(x \leqslant 6) \approx 0{,}3823$
Si l'énoncé demande la probabilité d'avoir "*au moins 4 succès*", cela signifie "4 succès ou plus" → cela correspond à $P (x \geqslant 4)$ et on calcule donc : $1 - P (x \leqslant 3)$. on obtient : $P(x \geqslant 4) = 1 - P(x \leqslant 3) \approx 0{,}9452$
Si l'énoncé demande la probabilité d'avoir "*au plus 3 succès*", cela signifie "3 succès ou moins" → cela correspond directement à $P (x \leqslant 3)$. On obtient : $P(x \leqslant 3) \approx 0{,}0548$

Comment bien exploiter une loi binomiale

On va, sur cette fiche, traiter deux énoncés qui vont nous permettre d'exploiter la loi binomiale, en découvrant une situation qui va nous amener à découvrir une nouvelle instruction de la calculatrice, et une situation qui va faire un lien avec les résolutions d'inéquations.

L'instruction "invBinom" : un exemple d'énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,6$. On cherche, à partir de combien de succès k, la probabilité P ($x \leqslant k$) est au moins égale à 0,9 soit 90 % .

On cherche à retrouver un nombre de succès , il faut reconnaitre l'utilisation de l'instruction "*invBinom*".
En prenant l'exemple de la Ti-83 Premium, on tapera successivement sur ***2nde* ; *distrib* ; *invBinom***
et on complète l'affichage de l'écran :

aire : 0,9 *nbreEssais : 20* *p : 0,6*

→ on obtient : $k = 15$

Ce résultat signifie qu'à partir de cette valeur 15, on est sûr d'avoir P ($x \leqslant k$) au moins égale à 0,9 .
On peut maintenant vérifier ce résultat à l'aide de l'instruction "*BinomFrep*".
En effet, avec les mêmes paramètres, on obtient : $P(x \leqslant 14) \approx 0,874$
$P(x \leqslant 15) \approx 0,949$

Et on peut aussi vérifier que P ($x \leqslant 16$), P ($x \leqslant 17$), ..etc.., sont bien supérieures à 0,9.

Une résolution d'inéquation : un exemple d'énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres *n inconnue* et $p = 0,286$. On cherche la plus petite valeur de n (soit le nombre minimal d'épreuve) pour que la probabilité d'obtenir au moins un succès soit supérieure à 0,99 (soit 99 %).

On va retranscrire cet énoncé sous une formulation plus "mathématiques" :

On cherche le nombre d'épreuves n pour que P ($X \geqslant 1$) > 0,99.

Or , on sait, qu'avec les événements contraires, on a P ($X \geqslant 1$) = 1 - P ($X \leqslant 0$) .
Mais il se trouve que P ($X \leqslant 0$) = P ($X = 0$), car la variable X ne peut pas prendre de valeurs négatives.

On utilise alors la formule utilisant les coefficients binomiaux :

$$P(X=0) = \binom{n}{0} \times 0,286^0 \times (1-0,286)^{n-0} \quad \text{avec } \binom{n}{0} = 1$$
$$= 1 \times 1 \times 0,714^n = 0,714^n$$

On veut donc résoudre l'inéquation : $1 - 0,714^n > 0,99$, c'est à dire $0,714^n < 0,01$

On peut alors: soit utiliser un tableau de valeurs pour voir quand $0,714^n$ devient inférieur à 0,01.
soit, après avoir étudié la fonction *ln*, effectuer directement la résolution

$$0,714^n < 0,01$$
$$\rightarrow \ln(0,714^n) < \ln(0,01)$$
$$\rightarrow n \times \ln(0,714) < \ln(0,01)$$
$$\rightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,714)} \quad \text{avec } \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,714)} \approx 13,67$$

$\boxed{\text{inversion du signe car } \ln(0,714) \text{ est négatif}}$

Donc il faut que le nombre d'épreuves soit supérieur ou égal à 14 (car c'est forcément un entier).

Propriétés de la loi binomiale : espérance , écart type

L'espérance mathématique d'une loi binomiale

Pour une loi binomiale $B(n;p)$, on a :

$$E(X) = n \times p$$

L'écart type d'une loi binomiale

Pour une loi binomiale $B(n;p)$, on a :

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Un exemple d'énoncé

Un contrôle de qualité a montré qu'un article produit par une entreprise était défectueux avec une probabilité de 0,05 (soit 5%).
Un magasin a commandé 80 articles et on note X la variable aléatoire qui va correspondre au nombre d'articles défectueux (et donc invendables).

Calculs :

On reconnait une loi binomiale $B(80\,;\,0{,}05)$ avec $n = 80$ et $p = 0{,}05$.

On obtient : $E(X) = 80 \times 0{,}05 = 4$ articles

et $\sigma(X) = \sqrt{80 \times 0{,}05 \times 0{,}95} \approx 1{,}9$ articles.

Interprétation :

Pour une commande de 80 articles, le magasin peut "espérer" avoir une moyenne de 4 articles défectueux (et donc 76 articles vendables !).

Application :

Le magasin achète chaque article 6 euros à l'entreprise et elle prévoit une marge de 1,2 euros sur chaque article vendu. Quel bénéfice peut espérer gagner l'entreprise dans cette situation ?

Le magasin achète pour 480 € (80×6 €)

Il peut espérer vendre 76 articles, à un prix de 7,2 € (avec la marge), soit $76 \times 7{,}2$ € $= 547{,}2$ €

Donc le bénéfice espéré est égal à :

$$547{,}2 - 480 = 67{,}2 \text{ €}$$

La loi binomiale : quelques énoncés du bac

Enoncé 1 (d'après Métropole 2018 exercice 2)

On interroge au hasard 40 habitants d'une ville, en admettant que cela correspond à des tirages successifs indépendants et avec remise.
On suppose que la probabilité qu'une personne soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées.
a) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 15 personnes vaccinées parmi les 40 habitants ?
b) Quelle est la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinées ?

On reconnait une loi binomiale $\mathcal{B}(40\,;0,4)$ avec $n = 40$ et $p = 0,4$

a) on cherche $p(X=15) \approx 0,123$ (binomFdp)

b) on cherche $p(X \geq 20) = 1 - p(X \leq 19) \approx 0,1298$ (binomFRep)

Enoncé 2 (d'après Nouvelle-Calédonie 2018 exercice 2)

Une épreuve de culture générale est donnée sous la forme d'un QCM de 20 questions.
Pour chaque question, il y a quatre réponses possibles , avec une seule qui est correcte.
Bruno répond au hasard à chacune des vingt questions.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses données par Bruno.
Quelle est la probabilité qu'il ait répondu juste à au moins la moitié des questions ?

On reconnait une loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;0,25)$ avec $n = 20$ et $p = 0,25$ (une chance sur quatre !)

On cherche $p(X \geq 10) = 1 - p(X \leq 9) \approx 0,014$ (binomFRep)

Enoncé 3 (d'après Asie 2018 exercice 2)

On considère une maladie avec un test créé pour lequel la probabilité que ce test soit positif sur une personne prise au hasard est égale à 0,158. On fait un test auprès de n personnes et on souhaite que la probabilité qu'au moins un individu soit testé positivement soit supérieure ou égale à 0,99.

On reconnait une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0,158)$.

On veut : $p(X \geq 1) \geq 0,99 \rightarrow 1 - p(X=0) \geq 0,99$

or $p(X=0) = \binom{n}{0} \times 0,158^0 \times (1-0,158)^n = 0,842^n$ car $\binom{n}{0} = 1$

On résout donc : $1 - 0,842^n \geq 0,99$

soit $0,842^n \leq 0,01 \rightarrow \ln(0,842^n) \leq \ln(0,01)$

$\rightarrow n \ln 0,842 \leq \ln 0,01 \rightarrow n \geq \boxed{\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,842}} \simeq 26,8$

Donc il faut au moins 27 personnes pour réaliser la condition.

Comment savoir si un événement sera vérifié à un seuil donné ou à un risque donné

Sous un intitulé qui parait un peu compliqué, il s'agit ici juste de calculer des probabilités liées à une loi binomiale. On se souviendra alors de la touche de la calculatrice qui permet de calculer les probabilités du type $P(X \leqslant ....)$: par exemple, c'est **binomFRep** avec la Ti-83 Premium.

Vocabulaire

On considère une loi binomiale $B(n; p)$.

1) Si une question nous demande de vérifier un événement "***au seuil de 95%***"
cela veut juste dire qu'il faut vérifier que la probabilité de l'événement est supérieure (ou égale) à 0,95
c'est à dire que l'on doit tout simplement vérifier : $P(\textit{événement}) \geqslant 0{,}95$.
2) Si une question nous demande de vérifier un événement "***au risque 5%***"
cela correspond au fait de vérifier cet événement "***au seuil de 95%***" (soit 100% - 5%).

→ c'est donc la même chose de parler de "***risque 5%***" ou de "***seuil de 95%***".

Un exemple d'énoncé

On va considérer que, dans un supermarché, chaque article a, indépendamment les uns des autres, une probabilité de 0,91 (ou 91 %) d'être disponible en rayon.
Avec une liste de 40 articles, est-on sûr, ***au seuil de 90 %***, de trouver *moins de 38 articles* en rayon ?

On considère la variable X représentant le nombre d'articles disponibles : X suit la loi binomiale $B(40; 0{,}91)$.
On cherche ici à vérifier : $P(X < 38) \geqslant 0{,}90$ (← 90%)
On calcule : $P(X < 38) = P(X \leqslant 37) \approx 0{,}711$
pour utiliser binomFRep

On a donc $P(X < 38) < 0{,}90$ → on n'est pas sûr, au seuil de 90%, de trouver moins de 38 articles.

Avec les mêmes conditions, peut-on être sûr ***au seuil de 95 %*** (ou ***au risque 5%***) de bien trouver *au moins 33 articles* dans les rayons ?

On cherche ici à vérifier : $P(X \geqslant 33) \geqslant 0{,}95$ (← 95%)
On calcule : $P(X \geqslant 33) = 1 - P(X \leqslant 32) \approx 0{,}976$
On a donc $P(X \geqslant 33) \geqslant 0{,}95$ → c'est bon !

Avec les mêmes conditions, peut-on être sûr ***au risque 1%*** de trouver entre 32 et 39 articles en rayon ?

Le "risque 1%" correspond à un "seuil de 99%".
→ on cherche à vérifier : $P(32 \leqslant X \leqslant 39) \geqslant 0{,}99$ (← 99%)
On calcule : $P(32 \leqslant X \leqslant 39) = P(X \leqslant 39) - P(X \leqslant 31) \approx 0{,}977$
On a donc $P(32 \leqslant X \leqslant 39) < 0{,}99$ → ce n'est pas bon !
Mais au risque de 3% (seuil de 97%), cela aurait été bon !!

Les intervalles de fluctuation - seuil , risque , centré (ou bilatéral)

On a, à nouveau, une notion très simple, une fois franchi le cap du vocabulaire initial. Il s'agira, encore, de calculer des probabilités du type $P (X \leqslant ....)$: avec **binomFRep** sur la Ti-83 Premium par exemple.

Définition d'un intervalle de fluctuation

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $B (n ; p)$.
On rappelle que parler d'un "seuil de 95 %" et d'un "risque 5 %" est équivalent.
Un intervalle $[a ; b]$ sera un ***intervalle de fluctuation au seuil de 95 %*** (ou au risque de 5%) si la variable aléatoire X nous permet de vérifier l'inégalité $P (a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0,95$.

On va passer assez vite sur ces intervalles (qui représentent une généralité) car, en pratique, on va s'intéresser à ceux qui ont une particularité : les ***intervalles de fluctuation centrés***.

Intervalle de fluctuation centré

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $B (n ; p)$. Et on suppose avoir trouver un ***intervalle de flucation au seuil de 95 %*** $\rightarrow$ on a donc a et b tel que $P (a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0,95$.
L'intervalle $[a ; b]$ sera un ***intervalle de fluctuation centré*** si les 5% ne vérifiant pas le seuil se répartissent équitablement avec 2,5% d'un côté (pour $X < a$) et 2,5% de l'autre (pour $X > b$).
Concrètement, il faudra ici juste calculer deux probabilités et vérifier que :

$$P (X < a) \leqslant \frac{0,05}{2} \text{ soit } P (X < a) \leqslant 0,025$$

$$P (X > b) \leqslant \frac{0,05}{2} \text{ soit } P (X > b) \leqslant 0,025$$

Ces 2 conditions sont *nécessaire et suffisante* pour avoir un ***intervalle de fluctuation centré ou bilatéral***.

Exemples

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B (109 ; 0,24)$.
L'intervalle $[18 ; 35]$ est-il un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % ?

On doit vérifier : $P(X < 18) \leqslant \frac{0,05}{2}$ soit $P(X < 18) \leqslant 0,025$

et $P(X > 35) \leqslant \frac{0,05}{2}$ soit $P(X > 35) \leqslant 0,025$

On a : $p(X < 18) = p(X \leqslant 17) \approx 0,022 \; (\leqslant 0,025)$

$p(X > 35) = 1 - p(X \leqslant 35) \approx 0,021 \; (\leqslant 0,025)$

$\rightarrow$ c'est bien un intervalle de fluctuation centré.

On considère une variable aléatoire X qui suit la même loi binomiale $B (109 ; 0,24)$.
L'intervalle $[14 ; 34]$ est-il un intervalle de fluctuation centré au risque 1 % ?

$\rightarrow$ *on parle ici de "risque 1%" , et on sait que cela signifie également "seuil de 99%".*

On doit vérifier : $P(X < 14) \leqslant \frac{0,01}{2}$ soit $P(X < 14) \leqslant 0,005$

et $P(X > 34) \leqslant \frac{0,01}{2}$ soit $P(X > 34) \leqslant 0,005$

On a : $p(X < 14) = p(X \leqslant 13) \approx 0,001 \; (\leqslant 0,005)$

$p(X > 34) = 1 - p(X \leqslant 34) \approx 0,034 \; (> 0,005 \; !!)$

$\rightarrow$ ce n'est pas un intervalle de fluctuation centré.

Comment trouver le plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant p$

On a déjà appris à répondre à cette question sur une fiche précédente (*la fiche 5 de ce chapitre*).
Mais il est bon ici de faire un point sur les différentes possibilités offertes par votre calculatrice.

Un exemple d'énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $B(20 ; 0{,}2)$ avec $n = 20$ et $p = 0{,}2$.
On veut trouver le plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}9$.

Un rappel important des touches vues sur les *fiches 3 et 4 de ce chapitre*

Avec cette loi binomiale $B(20 ; 0{,}2)$, on peut avec la *Ti 83 Premium* (par exemple) :

- utiliser la touche "***BinomFdp***" (voir la *fiche 3*) pour calculer des probabilités du type $P(X = ...)$
  On obtiendrait $P(X = 0) \approx 0{,}0115$; $P(X = 1) \approx 0{,}0576$; $P(X = 2) \approx 0{,}1369$
- utiliser la touche "***BinomFRep***" (voir la *fiche 4*) pour calculer des probabilités du type $P(X \leqslant ...)$
  On obtiendrait $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}206$

On peut vérifier, en faisant la somme $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$, que l'on obtient $P(X \leqslant 2)$.

Que signifie alors clairement l'énoncé proposé ?

La calculatrice nous permet de trouver "*à partir de quel entier k*" on dépasse 0,9 en ajoutant au fur et à mesure les probabilités $P(X = 0) + P(X = 1) + ... + P(X = k)$, somme qui correspond bien à $P(X \leqslant k)$.

Méthode 1 : la moins bonne car la moins adaptable aux différentes situations

On peut utiliser la touche "***InvBinom***". Cette méthode a été vue sur la *fiche 5 de ce chapitre*.

Avec l'énoncé proposé, on va utiliser les touches : ***2nde – distrib – InvBinom***
On obtient l'écran suivant en le complétant :

aire : 0,9
nbreEssais : 20
p : 0,2

Conclusion : le résultat obtenu est égal à 6 et c'est la réponse à la question posée.
Ce nombre 6 est le premier entier qui nous permet d'affirmer $P(X \leqslant 6) \geqslant 0{,}9$.

Le souci de cette méthode est d'être trop peu adaptable si on change d'inégalités avec $<$ ou $>$.

Méthode 2 : c'est celle qu'il faudra privilégier pour la suite du chapitre

Cette méthode va nous amener à utiliser un tableau de valeurs. Elle a l'énorme avantage de faire apparaitre le tableau avec les sommes obtenues en additionnant les probabilités au fur et à mesure.

On utilise la touche f (x) dans laquelle on rentre BinomFrep en tant que fonction de la variable X.
On commence en tapant sur la touche : ***f (x)***
On complète l'écran qui s'affiche (***Y1 = ...***) en tapant : ***2nde – distrib – BinomFrep***
On obtient alors l'écran suivant en le complétant :

nbreEssais : 20
p : 0,2
valeur de x : X

On obtient alors sur l'écran : ***Y1 = binomFrep (20 , 0.2 , X)***
Et on affiche le tableau de valeurs en tapant : ***2nde – table***
Ce tableau de valeurs nous fournit les valeurs successives de $P(X \leqslant 0)$, $P(X \leqslant 1)$, $P(X \leqslant 2)$ .. etc ...
On observe alors que $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}8042$ et $P(X \leqslant 6) \approx 0{,}9133$.
Conclusion : ce résultat 6 est bien le premier entier qui permet d'affirmer que l'on a $P(X \leqslant 6) \geqslant 0{,}9$.

Comme on a le tableau de valeurs sous les yeux, on pourra, à tout moment, adapter nos réponses, quelles que soient les inégalités proposées ($\leqslant$ ou $<$ ou $\geqslant$ ou $>$).
C'est LA METHODE à garder en tête pour la suite du chapitre.

Comment trouver le plus grand entier k tel que $P(X \geqslant k) \geqslant p$

Cette fiche est un complément de la fiche précédente. Elle va, tout de suite, nous permettre de voir l'aspect adaptable de la *méthode 2* de la fiche précédente (la *fiche 10* de ce chapitre).

Un exemple d'énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $B(40 ; 0,8)$ avec $n = 40$ et $p = 0,8$.
On veut trouver le plus grand entier k tel que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,9$.

Le calcul qui nous permet d'appliquer la méthode de la fiche précédente

On a : $p(X \geq k) = 1 - p(X < k)$

Donc l'inégalité $p(X \geq k) \geq 0,9$ devient :

$1 - p(X < k) \geq 0,9$

soit $-p(X < k) \geq -0,1$ (0,9 − 1)

soit $p(X < k) \leq 0,1$

bien faire le changement !

La réponse au problème posé

Une fois que le calcul ci-dessus a été effectué, on peut appliquer et utiliser la *méthode 2* de la fiche précédente. Il faudra juste prévoir une petite adaptation : la *fiche 10* nous faisait travailler avec $(X \leqslant k)$ alors que cette *fiche 11* nous amène à travailler avec $(X < k)$.

Aucun apprentissage par coeur ici à faire, il faut juste être vigilant en regardant le tableau de valeurs de votre calculatrice !!

On cherche k tel que $p(X < k) \leq 0,1$

On rappelle juste ici que l'on utilise la touche $f(x)$ dans laquelle on rentre BinomFrep en tant que fonction de la variable X.

On obtient le tableau de valeurs suivant :

X	$Y1$
27	0,0432
28	$\boxed{0,0875}$
29	0,1608
30	0,2682

On cherche bien ici $(X < k)$

Donc on aura $\boxed{k = 29}$

car $p(X < 29) = p(X \leq 28) = 0,0875 \leq 0,1$

Comment déterminer un intervalle de fluctuation centré

On a déjà appris à vérifier dans ce chapitre qu'un intervalle donné était un intervalle de fluctuation centré. Mais, pour pouvoir aborder les applications intéressantes de ce chapitre, il va falloir apprendre à déterminer soi-même cet intervalle !!

L'énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $B(50 ; 0,7)$ avec $n = 50$ et $p = 0,7$.
On veut trouver un intervalle de fluctuation centré au seuil de 0,95 (soit 95 %).

On rappelle que la recherche d'un *intervalle de fluctuation centré* nous amène à faire le travail suivant :

on cherche a et b tels que $\begin{cases} p(X < a) \leq \frac{0,05}{2} \rightarrow p(X < a) \leq 0,025 \\ p(X > b) \leq \frac{0,05}{2} \rightarrow p(X > b) \leq 0,025 \end{cases}$

La méthode pour trouver un intervalle de fluctuation centré

C'est plutôt simple car il suffit d'appliquer le travail vu sur les ***fiches précédentes***.
Il faudra juste bien adapter ce travail aux différentes inégalités rencontrées (< ou ⩽ , > ou ⩾).

Retenez bien que la **méthode** consiste, tout simplement, à entrer ***binomFrep*** (comme une fonction de la variable *X*) en utilisant la ***touche f (x)***. On écrit alors ***Y1 = binomFrep (50 , 0.7 , X).***
Les réponses s'obtiennent en règlant ***déf table***, qui permet de bien régler le tableau de valeurs à afficher.

→ ***pour trouver la valeur de a*** : on affiche le tableau de valeurs suivant

X	*Y1*
27	0.0123
28	0.0251
29	0.0478

On a $p(X < 28) = p(X \leq 27) = 0,0123 \leq 0,025$

Donc on aura $\boxed{a = 28}$ (car on cherche $X < a$).

→ ***pour trouver la valeur de b*** : on commence par faire la "petite" transformation d'écriture.

On a $p(X > b) \leq 0,025$
soit $1 - p(X \leq b) \leq 0,025$
soit $p(X \leq b) \geq 0,975$

On affiche le tableau de valeurs suivant :

X	*Y1*
39	0.9211
40	0.9598
41	0.9817

On a $p(X \leq 41) = 0,9817 \geq 0,975$
$p(X \leq 40) = 0,9598 < 0,975$

Donc on aura $\boxed{b = 41}$ (car on cherche $X \leq b$).

On obtient donc [28 ; 41] comme intervalle de fluctuation centré.

Seuil , intervalle de fluctuation centré et validation d'hypothèse

Les exercices qui vont suivre maintenant vont synthétiser les compétences vues dans l'ensemble du chapitre. L'intérêt va être de valider ou non une hypothèse, en tenant compte d'un certain seuil (que l'on pourra appréhender comme une marge d'erreur acceptable).

Enoncé 1 (d'après Bac)

Un fabricant d'électroménager affirme que seulement 3% de ces appareils fabriqués ont un défaut.
On teste cette affirmation en tirant au hasard 1 500 appareils parmi ceux fabriqués.
On appelle D la variable aléatoire donnant le nombre d'appareils avec défaut.

Question 1 : Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire D ?

On peut considérer que D suit une loi binomiale $B(\underset{n}{1500}; \underset{p}{0{,}03})$ car on effectue un tirage de façon indépendante et dans les mêmes conditions avec deux issues possibles (D ou $\bar{D}$)

Question 2 : En déduire un *intervalle de fluctuation centré au seuil de 95%* (on applique la *fiche 12*).

$a = 33$ → on rappelle la condition $p(X < a) \leq 0{,}025$

$b = 58$ → on rappelle la condition $p(X \leq b) \geq 0{,}975$

On obtient $I = [33 ; 58]$.

Question 3 : On vérifie que, sur les 1500 appareils testés, il y en a 40 qui ont un défaut.
Ce test remet-il en cause l'affirmation du fabricant ?

On a $40 \in I$ → le fabricant est dans la marge.
On ne remet pas en cause son affirmation (au seuil de 95%)

Enoncé 2 (d'après Bac)

Un groupe pharmaceutique affirme qu'un de ces vaccins est efficace à 92 %.
Pour tester cette hypothése, on tire au hasard 400 patients vaccinés et on vérifie s'ils sont guéris ou non.
On appelle V la variable aléatoire donnant le nombre de patients guéris à l'aide de ce vaccin.

Question 1 : Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire V ?

La variable V suit une loi binomiale $(400 ; 0{,}92)$ pour des raisons similaires à l'énoncé précédent !

Question 2 : En déduire un *intervalle de fluctuation centré au seuil de 95%* (on applique la *fiche 12*).

$a = 356$ → on rappelle la condition $p(X < a) \leq 0{,}025$

$b = 378$ → on rappelle la condition $p(X \leq b) \geq 0{,}975$

On obtient $I = [356 ; 378]$

Question 3 : On vérifie que, sur les 400 patients, il y en a 350 qui sont guéris.
Ce test remet-il en cause l'affirmation du groupe pharmaceutique ?

On a $350 \notin I$ → on est au delà de la marge d'erreur.
On peut remettre en cause l'affirmation proposée !

Problème de seuil

Ces problèmes de seuil vont devenir des "classiques" pour le bac (ils ont un aspect très concrets).
Vous allez voir sur ces exemples que le plus compliqué est de bien interpréter les énoncés.
Ensuite, il s'agit juste de bien utiliser sa calculatrice (en revoyant éventuellement le travail de la *fiche 10*).

Enoncé 1

D"après une étude basée sur les premières ventes d'un livre, il y a 15% des lecteurs qui ne l'ont pas aimé. Une librairie commande alors 236 exemplaires de ce livre. La maison d'édition propose à cette librairie une offre "satisfait ou remboursé": si au plus k clients n'apprécient pas le livre et se font rembourser, alors la maison d'édition fera une réduction de 12 % au libraire.
Quelle doit être la valeur minimale de k pour que la maison d'édition soit sûr de ne pas avoir à faire cette réduction au libraire, au risque d'erreur de 5% ?

Attention, le pourcentage de réduction de 12 % est un leurre ici qui ne sert "à rien".

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lecteurs n'aimant pas le livre.

On peut supposer que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(\overset{n}{236} ; \overset{p=15\%}{0{,}15})$.

On cherche alors k tel que $p(X > k) \leq 0{,}05$

c'est à dire que l'on veut que la probabilité que "le nombre de lecteurs n'aimant pas le livre dépasse k" soit inférieure ou égale au risque de 5% (soit 0,05).

On veut $p(X > k) \leq 0{,}05 \longrightarrow p(X \leq k) \geq 0{,}95$

et on obtient $k = 45$ clients non satisfaits.

Enoncé 2

Dans un lycée, les statistiques montrent que les 250 élèves qui ont réservé un repas à la cantine n'y vont pas dans 8 % des cas. Tout en cherchant à éviter de gâcher de la nourriture, quel est le nombre minimal de repas k à préparer pour que chaque élève soit sûr à 99% d'avoir bien un repas qui l'attend ?

Je pense qu'il est plus simple de considèrer ici que 92 % des élèves mangent à la cantine.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'élèves mangeant à la cantine.

On peut supposer que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(\overset{n}{250} ; \overset{p=92\%}{0{,}92})$

On cherche alors k tel que $p(X \leq k) \geq 0{,}99$

c'est à dire que l'on veut que la probabilité que "le nombre d'élèves venant manger ne dépasse pas k" soit supérieure ou égale au seuil de 99% (soit 0,99).

On veut $p(X \leq k) \geq 0{,}99$

et on obtient $k = 239$ repas à préparer.

La surréservation (ou surbooking) de certaines compagnies

Pour les compagnies aériennes (par exemple), le surbooking est économiquement important car il peut permettre de remplir les avions, en tenant compte de la défection de certains passagers. Mais il doit être réaliser avec intelligence car sinon on peut se retrouver avec plus de passagers que de sièges libres !!

Enoncé

Une compagnie aérienne doit remplir un avion de 180 sièges. Le pourcentage habituel de défection des passagers, sur une ligne donnée, est de 9%. Elle décide donc de mettre plus de 180 billets en vente (c'est bien ça la surréservation ou "surbooking").
Il faut alors déterminer le nombre de billets à vendre pour être sûr "au seuil de 95 %" de ne pas vendre trop de billets (c'est à dire qu'il n'y aura pas plus de 180 personnes qui prendront finalement le vol).

La particularité est que l'on va chercher $\boxed{n}$ ici.
En effet, si on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de passagers prenant <u>réellement</u> l'avion, alors on peut considérer que X suit une loi binomiale

$\mathcal{B}(n\,;\,0,91)$ 9% de défections donc 91% de passagers réels

nombre total de billets en vente

On utilise la calculatrice avec la touche $\boxed{f(x)}$
et on tape $Y_1 = \text{binomFRep}(X, 0.91, 180)$
car on veut $P(X \leq 180) \geq 0,95$.
c'est à dire que :
la probabilité, que le nombre de passagers prenant l'avion soit plus petit ou égal à 180, doit être supérieure ou égale au seuil fixé de 95% (soit 0,95).
On obtient : $n = 191$.

CONCLUSION : avec un risque de 5%, la compagnie peut mettre en vente 191 billets, et ne pas avoir plus de 180 passagers (compte tenu des défections).

Les sondages et la réalité d'une élection présidentielle

Certaines élections ont amené une grande déception chez certains candidats dont les résultats n'étaient pas, selon eux, à la hauteur des prédictions données par les sondages.
C'est en fait le signe d'une méconnaissance des outils mathématiques et, surtout, de la notion de marge d'erreur (liée à la notion de seuil) qui existe par rapport à tous sondages réalisés.

Enoncé

En 2002, un séisme politique a eu lieu au premier tour de l'élection présidentielle.
Les sondages (qui s'effectue sur une population de 1 000 personnes globalement) nous donnaient :
Jacques Chirac 20 % Lionel Jospin 18 % Jean Marie Le Pen 15 %
Mais les résultats définitifs du premier tour ont été les suivants :
Jacques Chirac 19,9 % Lionel Jospin 16,2 % Jean Marie Le Pen 16,9 %
D'après les sondages, Lionel Jospin ne pouvait qu'être au second tour. Pourtant, c'est bien Jean Marie Le Pen qui est "passé devant". Les instituts de sondages se sont ils trompés à ce point là ??

Un sondage ne sera jamais la réalité → il y a une marge d'erreur reconnue : c'est le seuil (ou le risque).
Il faut ici calculer l'INTERVALLE DE FLUCTUATION CENTRÉ pour chacun des candidats (au seuil de 95% par exemple).

* Pour Jospin, on peut considérer que le nombre d'électeurs votant pour lui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(1000\,;\,0,18)$

population testée → 1000 ; résultat du sondage 18% → 0,18

On obtient l'intervalle $[167\,;\,204]$
soit, en divisant par 1000, on obtient $[15,7\%\,;\,20,4\%]$.

Cela signifie que, si on faisait 100 élections, il y en aurait 95 (avec ce seuil) qui donnerait un résultat appartenant à l'intervalle de fluctuation centré.

Finalement, Jospin a obtenu 16,2% des voix, ce qui n'a absolument rien d'anormal ou d'incohérent.
→ c'était une surprise mathématiquement prévisible !

* Pour Le Pen, avec la loi $\mathcal{B}(1000\,;\,0,15)$ résultat du sondage 15%

on obtient l'intervalle $[12,8\%\,;\,17,2\%]$.
Et son résultat de 16,9% n'est également pas du tout incohérent !