Les intégrations par parties : principe et méthode

Ce principe de calcul va être très important car, sous certaines conditions, il va nous permetrre de calculer des intégrales pour des fonctions dont on se sait pas trouver directement de primitive.

La formule générale de l'intégration par parties

pour deux fonctions u et v, continues sur $[a;b]$

On aura : $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

L'application de cette formule

Plus que de long discours, le plus efficace est voir tout de suite un exemple d'intégration par parties.

On va calculer $\int_0^1 xe^x\,dx$.

On doit pouvoir constater que l'on ne sait pas trouver directement une primitive de la fonction $x \to x\,e^x$.
Par contre, on voit qu'en dérivant la fonction définie par $u(x) = x$, on obtient $u'(x) = 1$ et cela va permettre de faire "*disparaitre*" x dans la suite du calcul.
De plus, on constate aussi que la fonction $x \to e^x$ est facilement intégrable car on connait sa primitive.
On pourra donc poser $v'(x) = e^x$ et on obtient facilement une primitive avec $v(x) = e^x$.

On pose donc : $u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x \longrightarrow v(x) = e^x$ (primitive de e^x)

On aura : $\int_0^1 \underset{u}{x}\,\underset{v'}{e^x}\,dx = \left[\underset{u}{x}\,\underset{v}{e^x}\right]_0^1 - \int_0^1 \underset{u'}{1}\times\underset{v}{e^x}\,dx$

avec $\left[xe^x\right]_0^1 = 1e^1 - 0e^0 = e$

et $\int_0^1 1\times e^x\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

On obtient donc : $\int_0^1 xe^x\,dx = \underbrace{e}_{\left[xe^x\right]_0^1} - \underbrace{(e-1)}_{\int_0^1 1\times e^x\,dx} = 1$.

Un résumé du principe

Pour effectuer une intégration par parties, le principe sera donc :
- de décomposer la fonction à intégrer en un ***produit*** de deux fonctions.
- une fonction représentera $u(x)$ et il faut que sa dérivée $u'(x)$ permette une simplification de l'écriture.
- une fonction représentera $v'(x)$ et il faut que l'on connaisse directement une primitive $v(x)$.