Qu'est ce qu'une primitive ?

Définition

On considère une fonction f , définie sur un intervalle I.
La fonction F sera une primitive de f sur l'intervalle I si on a $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in$ I .

<u>Exemple</u> : si on dérive $F(x) = x^2 + 1$,
on obtient $F'(x) = 2x$.

<u>Donc</u> la fonction définie par $F(x) = x^2 + 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par $f(x) = 2x$.

Remarque

Par convention, on notera très souvent une primitive en utilisant une lettre majuscule : la fonction G sera une primitive de la fonction g , la fonction H sera une primitive de la fonction h .....

Propriété

Si on parle d'une primitive , ***et non pas de la primitive***, c'est parce qu'il existe pour une fonction donnée une infinité de primitives, qui seront définies à une constante k près.
C'est à dire que toutes les fonctions s'écrivant sous la forme $F + k$ seront une primitive de la fonction f.

Si on dérive $F_1(x) = x^2 + 3$, on obtient $F_1'(x) = 2x$
si on dérive $F_2(x) = x^2 + 4$, on obtient $F_2'(x) = 2x$

<u>Donc</u> les fonctions F_1 et F_2 sont toutes les deux une primitive de la fonction définie par $f(x) = 2x$

Condition particulière

Il existera par contre une ***unique primitive*** satisfaisant une *condition particulière* (on parlera de *condition initiale* en Physique).

Avec $F(x) = x^2 + 1$, on aura $F(0) = 1$
et $F'(x) = 2x$

<u>Donc</u> la fonction définie par $F(x) = x^2 + 1$ est l'<u>unique</u> primitive de $f(x) = 2x$, vérifiant la condition $F(0) = 1$.

Comment montrer qu'une fonction est une primitive

En classe de Terminale, la recherche d'une *primitive* va amener deux types de raisonnements :

- soit la *primitive* est "facile" à déterminer, car elle est liée à des formules classiques et il faudra réussir à la trouver tout seul.
- soit la primitive est trop compliquée à trouver directement, et l'énoncé proposera de montrer ou de vérifier qu'une fonction est une primitive de la fonction donnée. C'est l'objet de cette fiche !

Méthode

Pour montrer (ou pour vérifier) qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f, il suffit de dériver la fonction F et de vérifier que l'on a bien $\boldsymbol{F' = f}$.

Exemples

Montrons que la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, par $F(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x + 1$ est une primitive de la fonction $f(x) = 12x^2 + 10x + 6$

On dérive $F(x)$ → on obtient $F'(x) = 12x^2 + 10x + 6$

Donc $F'(x) = f(x)$ → F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Montrons que la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, par $F(x) = (3x^2 - 6x + 7)e^x$ est une primitive de la fonction $f(x) = (3x^2 + 1)e^x$

On dérive $F(x)$ avec la formule $(uv)' = u'v + v'u$

→ $u(x) = 3x^2 - 6x + 7$ $\quad v(x) = e^x$

$u'(x) = 6x - 6$ $\quad v'(x) = e^x$

On a : $F'(x) = (6x-6)e^x + e^x(3x^2 - 6x + 7)$

$= e^x(6x - 6 + 3x^2 - 6x + 7)$

$= e^x(3x^2 + 1)$

Donc $F'(x) = f(x)$ → F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Un grand classique ! Montrons que la fonction, définie sur $]0\,;+\infty[$, par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $f(x) = \ln x$

On dérive $F(x)$ avec la formule $(uv)' = u'v + v'u$

→ $u(x) = \ln x$ $\quad v(x) = x$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad v'(x) = 1$

On a : $F'(x) = \frac{1}{x} \times x + 1 \times \ln x \boxed{-1}$ ne pas oublier la dérivée de $-x$

$= 1 + \ln x - 1 = \ln x$

Donc $F'(x) = f(x)$ → F est bien une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

Un retour sur les formules de dérivées à parfaitement connaitre

Ma méthode, pour déterminer des primitives pendant cette année de Terminale, ne fera pas du tout appel au tableau classique des primitives donné dans certains cours. Cette méthode nécessitera tout simplement de ***parfaitement*** connaitre les formules de dérivation de l'ensemble des fonctions de base.

Les formules de dérivation à connaitre par coeur

La dérivée de ...	*est égale à .....*
$x^n \quad (n \neq 0)$	$n \times x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Application pour la dérivation des fonctions composées

On se souviendra que si l'on dérive une fonction qui est constituée avec autre chose que la seule variable x, on se retrouve avec une fonction composée du type $f(u)$ et il faudra multiplier la dérivée par u'.

La dérivée de ...	*est égale à .....*
$u^n \quad (n \neq 0)$	$n \times u^{n-1} \times u'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \times u' \rightarrow \frac{-u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \times u' \rightarrow \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln u$	$\frac{1}{u} \times u' \rightarrow \frac{u'}{u}$
e^u	$e^u \times u' \rightarrow u'e^u$
$\sin u$	$\cos u \times u' \rightarrow u'\cos u$
$\cos u$	$-\sin u \times u' \rightarrow -u'\sin u$

Comment déterminer une primitive d'un polynôme

Pour une fonction se présentant sous la forme d'un *polynôme*, il sera pour le coup très efficace d'avoir des réflexes de "*par coeur*", contrairement aux autres fonctions qui suivront sur les autres fiches.

Primitive des termes d'un polynôme

Une primitive de	*est égale à ....*
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$
x^3	$\frac{x^4}{4}$
x^4	$\frac{x^5}{5}$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Application

On va voir ici deux exemples de fonctions polynômes dont on va déterminer une primitive .

<u>Exemple 1</u> :

Si on a $f(x) = 5\boxed{x^3} + 6\boxed{x^2} + 7\boxed{x} + \boxed{3}$

alors on aura $F(x) = 5 \times \boxed{\frac{x^4}{4}} + 6 \times \boxed{\frac{x^3}{3}} + 7 \times \boxed{\frac{x^2}{2}} + \boxed{3 \times x}$

soit $F(x) = \frac{5}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 3x$

<u>Exemple 2</u> :

Si on a $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{5} + \frac{3}{4}x - 1$

alors on aura $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^5}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{x^2}{2} - x$

soit $F(x) = \frac{x^5}{10} - \frac{x^3}{15} + \frac{3}{8}x^2 - x$

Comment trouver une primitive : MA méthode

Cette méthode consiste ***à ne pas apprendre*** le tableau classique des primitives vu dans certains cours.
En effet, je considère qu'après une année à avoir appris, calculé, utilisé des fonctions dérivées, il me parait intéressant de valoriser ce travail et plutôt contre productif (et source de confusion) d'apprendre ce tableau des primitives.

Ma méthode consiste alors à raisonner en terme de dérivation. On devra partir de la ***seule forme possible*** de la primitive. Le plus simple est de voir cette méthode en pratique ci après ....

Méthode pour trouver une primitive

On va chercher une primitive de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1}$

Il faut comprendre alors que la seule possibilité "d'envoyer" par dérivation ($x^2 + 1$) au dénominateur , c'est de partir de la fonction *ln* !

- on ne s'occupe pas du $5x$ pour le moment, il va apparaitre lors de la dérivation de la fonction composée.
- ne pas confondre en pensant qu'il faut partir d'une fonction du type $\dfrac{1}{x}$. Il faudrait alors que la fonction dont on cherche une primitive soit du type $\dfrac{1}{(....)^2}$

On cherche une primitive de $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1}$

→ on part alors de $F(x) = \ln(x^2+1)$ $\boxed{\times \frac{5}{2}}$

On multiplie donc $F(x)$ par $\frac{5}{2}$

On dérive $F(x)$ → on a $F'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \times 2x$

$= \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\boxed{\times \frac{5}{2}}$

on multiplie par $\frac{5}{2}$
car on obtient $2x$
alors que l'on voulait $5x$

Conclusion : on a $F(x) = \dfrac{5}{2}\ln(x^2+1)$

Remarque

Avec cette méthode, si on doit compenser par autre chose qu'un coefficient multiplicateur (si on doit compenser en mettant du x , si on doit ajouter ou soustraire le moindre élément ...), c'est que l'on s'est trompé dans la fonction de départ !!

Comment trouver une primitive : quelques exemples (1)

On va mettre en pratique ***ma méthode*** vue avec la fiche précédente.
Pour rappel, elle demande de trouver ***la seule forme possible*** de la primitive F qui permettra de retrouver la fonction f par dérivation. Ensuite, on *dérive* cette fonction F et on corrige avec un *coefficient* !!

Exemple 1 : On va chercher une primitive de la fonction définie par $f(x) = 5(4x+1)^2$

On part de $F(x) = (4x+1)^3$

c'est u'

On dérive et on obtient $F'(x) = 3(4x+1)^2 \times \boxed{4}$

$= 12(4x+1)^2 \quad \boxed{\times \frac{5}{12}}$

on multiplie par $\frac{5}{12}$ pour obtenir 5

Conclusion : on a $F(x) = \frac{5}{12}(4x+1)^3$

Exemple 2 : On va chercher une primitive de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4}{(3x+1)^2}$

On part de $F(x) = \dfrac{1}{3x+1}$

c'est u'

On dérive et on obtient $F'(x) = \dfrac{-1}{(3x+1)^2} \times \boxed{3}$

$= \dfrac{-3}{(3x+1)^2} \quad \boxed{\times \frac{4}{-3}}$

on multiplie par $\frac{4}{-3}$ pour obtenir 4

Conclusion : on a $F(x) = -\dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{3x+1} = \dfrac{-4}{3(3x+1)}$

Exemple 3 : On va chercher une primitive de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{(5x^2+1)}}$

On part de $F(x) = \sqrt{5x^2+1}$

c'est u'

On dérive et on obtient $F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{5x^2+1}} \times \boxed{10x}$

$= \dfrac{5x}{\sqrt{5x^2+1}} \quad \boxed{\times \frac{6}{5}}$

on multiplie par $\frac{6}{5}$ pour obtenir $6x$

Conclusion : on a $F(x) = \dfrac{6}{5}\sqrt{5x^2+1}$

Comment trouver une primitive : quelques exemples (2)
Avec la fonction ln

Les primitives que l'on va trouver ici feront toute intervenir la fonction *logarithme neperien*.
On est dans le cas où une fonction a été "*envoyée au dénominateur*" (sans pour autant être mise au carré, ou avec toute autre puissance ...). La seule possibilité est alors de partir d'une primitive utilisant *ln* .

Exemple 1 : On va chercher une primitive de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4}{3x+1}$

On part de $F(x) = \ln(3x+1)$

On dérive et on obtient $F'(x) = \dfrac{1}{3x+1} \times \boxed{3}$ c'est u'

$= \dfrac{3}{3x+1}$ $\boxed{\times \dfrac{4}{3}}$ on multiplie par $\frac{4}{3}$ pour obtenir 4

Conclusion : on a $F(x) = \dfrac{4}{3}\ln(3x+1)$

Exemple 2 : On va chercher une primitive de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

On part de $F(x) = \ln(x^2+1)$

On dérive et on obtient $F'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \times \boxed{2x}$ c'est u'

$= \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\boxed{\times \dfrac{1}{2}}$ on multiplie par $\frac{1}{2}$ pour obtenir x

Conclusion : on a $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$

Exemple 3 : On va chercher une primitive de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+2}$

On part de $F(x) = \ln(e^x+2)$

On dérive et on obtient $F'(x) = \dfrac{1}{e^x+2} \times \boxed{e^x}$ c'est u'

$= \dfrac{e^x}{e^x+2}$ → on obtient directement $f(x)$

Conclusion : on a $F(x) = \ln(e^x+2)$

Comment trouver une primitive : quelques exemples (3)
Avec la fonction exponentielle

Les primitives que l'on va trouver ici feront toute intervenir la fonction *exponentielle*.
On est dans le cas où une fonction s'écrit avec une *exponentielle* et la seule possibilité est alors de partir d'une primitive utilisant aussi la fonction *exponentielle* . Il n'y a pas d'autre choix possible !

Exemple 1 : On va chercher une primitive de la fonction définie par $f(x) = 7\,e^{5x}$

On part de $F(x) = e^{5x}$

On dérive et on obtient $F'(x) = \boxed{5}\,e^{5x}$ c'est u' $\boxed{\times \frac{7}{5}}$

on multiplie par $\frac{7}{5}$ pour obtenir 7

Conclusion : on a $F(x) = \frac{7}{5}e^{5x}$

Exemple 2 : On va chercher une primitive de la fonction définie par $f(x) = e^{-x}$

On part de $F(x) = e^{-x}$

On dérive et on obtient $F'(x) = \boxed{-1} \times e^{-x}$ c'est u'

$= -e^{-x}$ $\boxed{\times(-1)}$

on multiplie par (-1) pour "enlever le moins"

Conclusion : on a $F(x) = -e^{-x}$

Remarque : on peut alors retenir ce résultat par coeur. Si on a $f(x) = e^{-x}$, on aura $F(x) = -e^{-x}$

Exemple 3 : On va chercher une primitive de la fonction définie par $f(x) = 3x\,e^{x^2}$

On part de $F(x) = e^{x^2}$

On dérive et on obtient $F'(x) = \boxed{2x}\,e^{x^2}$ c'est u' $\boxed{\times \frac{3}{2}}$

on multiplie par $\frac{3}{2}$ car $2x \times \frac{3}{2} = 3x$

Conclusion : on a $F(x) = \frac{3}{2}e^{x^2}$

Décomposition d'une fonction pour trouver une primitive
Identification termes à termes

Les *fractions rationnelles*, qui se présentent comme le quotient de deux fonctions polynômes, ne permettent pas, en général, de déterminer directement leurs primitives.
Il est alors nécessaire de décomposer ces fractions rationnelles en éléments simples, en utilisant une technique appelée *identification termes à termes*.

Méthode et exemple

On considère une fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+5x-1}{x+2}$, sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$

(*on peut constater que l'on ne sait pas trouver une primitive de cette fonction ....*)

Question 1 : Trouver les trois réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$

Question 2 : En déduire une primitive de f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$

Question 1 : On va partir de l'expression $ax + b + \frac{c}{x+2}$, que l'on va mettre sous le même dénominateur. On pourra ainsi la comparer avec l'expression initiale $\frac{x^2+5x-1}{x+2}$,
en faisant une *identification termes à termes* (il y a correspondance entre les coefficients de x^2 , de x .....).

On aura : $ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)}{x+2} + \frac{c}{x+2}$

$$= \frac{ax^2 + x(2a+b) + 2b + c}{x+2}$$

On identifie termes à termes avec $\frac{x^2+5x-1}{x+2}$

On obtient $\begin{cases} a = 1 \\ 2a+b = 5 \\ 2b+c = -1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -7 \end{cases}$

Question 2 : Avec la nouvelle forme de la fonction f, on peut déterminer toutes les primitives voulues !

On a donc : $f(x) = x + 3 - \frac{7}{x+2}$

$\longrightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 7\ln(x+2)$

pour tout $x \in\,]-2\,;+\infty[$