Comment étudier une suite d'intégrales et sa convergence

Décidément, les suites se retrouvent vraiment tout au long de cette année de terminale. En tous cas, elles vont nous donner l'occasion de croiser de belles applications sur les propriétés des intégrales.

On considère la suite d'intégrales

$$U_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2} dx \quad , \text{ pour } n \geq 0 .$$

Il doit être évident pour vous que l'on ne peut pas exprimer directement cette suite U_n en fonction de n car on ne peut pas facilement trouver une primitive de la fonction $x \to x^{n+1} e^{-x^2}$.
Par contre, on va pouvoir étudier cette suite et montrer, entre autre, qu'elle converge.

1) Calcul du premier terme U_0

On a $U_0 = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$

Une primitive de $x \to x e^{-x^2}$ sera $x \to -\frac{1}{2} e^{-x^2}$

Donc $U_0 = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^1 = \left[-\frac{1}{2} e^{-1^2} - \left(-\frac{1}{2} e^{-0^2}\right)\right] = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

2) Montrons que la suite est minorée par 0 (soit $U_n \geq 0$ pour tout n)

On va ici utiliser une propriété très importante sur les intégrales

Si $f \geq 0$ (resp. ≤ 0) sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ (resp. ≤ 0)

On a $x^{n+1} e^{-x^2} \geq 0$ pour tout $x \in [0;1]$

Donc $\int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2} dx \geq 0 \to U_n \geq 0$ pour tout n .

3) Montrons que la suite est décroissante

On utilise la méthode de base qui consiste à calculer $U_{n+1} - U_n$ et à montrer que le résultat est négatif.

On calcule $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^{n+2} e^{-x^2} dx - \int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2} dx$

$= \int_0^1 \left(x^{n+2} e^{-x^2} - x^{n+1} e^{-x^2}\right) dx$ (par linéarité)

$= \int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2} (x-1) dx$ (en factorisant)

or $x^{n+1} \geq 0$ et $e^{-x^2} > 0$ pour $x \in [0;1]$

Mais $x - 1 \leq 0$ pour $x \in [0;1]$.

Donc $x^{n+1} e^{-x^2}(x-1) \leq 0$ pour tout $x \in [0;1]$

soit $\int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2}(x-1)\,dx \leq 0$

On obtient $U_{n+1} - U_n \leq 0 \rightarrow (U_n)$ est une suite décroissante.

4) En déduire que la suite (U_n) est convergente

La suite (U_n) est décroissante et minorée par 0.

Donc la suite (U_n) est convergente.

5) Montrons que, pour tout n, on a $U_n \leqslant \frac{1}{n+2}$

On va ici utiliser une propriété très importante sur les intégrales

Si $f(x) \leq g(x)$ pour $x \in [a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Pour tout $x \in [0;1]$, on a : $-1 \leq -x^2 \leq 0$

soit $e^{-x^2} \leq e^0 \rightarrow e^{-x^2} \leq 1$

On en déduit : $x^{n+1} e^{-x^2} \leq x^{n+1}$ pour tout $x \in [0;1]$

soit $\int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^1 x^{n+1}\,dx$

Or, on a $\int_0^1 x^{n+1}\,dx = \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1^{n+2}}{n+2} - \frac{0^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{n+2}$

On obtient donc : $\int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2}\,dx \leq \frac{1}{n+2}$

soit $U_n \leq \frac{1}{n+2}$ pour tout n.

6) En déduire la limite de la suite (U_n)

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$ et $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+2}$.

On en déduit, avec le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.