Comment effectuer une intégration par parties : quelques exemples

Ces exemples doivent vous permettre d'acquérir quelques réflexes, et un peu d'expérience, afin de savoir ensuite bien poser quelle fonction représentera la fonction u à deriver, et quelle fonction représentera la fonction v' dont il faudra trouver une primitive.

Exemple 1

On veut calculer $I_n = \int_1^e x^n \ln x \, dx$ pour $n \geq 0$

On pose : $u(x) = \ln x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x^n \rightarrow v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (primitive de x^n)

On aura : $\int_1^e \underset{v'}{x^n} \underset{u}{\ln x} \, dx = \left[\underset{v}{\frac{x^{n+1}}{n+1}} \underset{u}{\ln x} \right]_1^e - \int_1^e \underset{v}{\frac{x^{n+1}}{n+1}} \times \underset{u'}{\frac{1}{x}} \, dx$

avec $\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x \right]_1^e = \frac{e^{n+1}}{n+1} \underbrace{\ln e}_{=1} - \frac{1^{n+1}}{n+1} \underbrace{\ln 1}_{=0} = \frac{e^{n+1}}{n+1}$

et $\int_1^e \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{n+1} \int_1^e x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_1^e = \frac{1}{n+1} \left(\frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1^{n+1}}{n+1} \right)$

On obtient : $I_n = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left(\frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n e^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$

Exemple 2

Avec une intégration par parties, on va trouver une primitive de $\ln x$ (qui sera donc $x \ln x - x$).

→ dans cet exemple, on voit qu'il ne faut pas hésiter à poser $u'(x) = 1$. Retenez bien ce "petit truc" !

→ dans cet exemple, on va utiliser un "abus de notation" en ne mentionnant pas les bornes de l'intégrale.

On veut calculer $\int \ln x \, dx$ soit $\int 1 \times \ln x \, dx$

On pose : $u(x) = \ln x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 1 \rightarrow v(x) = x$ (primitive de 1)

On aura : $\int \underset{v'}{1} \times \underset{u}{\ln x} \, dx = \left[\underset{v}{x} \underset{u}{\ln x} \right] - \int \underset{v}{x} \times \underset{u'}{\frac{1}{x}} \, dx$

avec $\int x \times \frac{1}{x} \, dx = \int 1 \, dx = [x]$

On obtient : $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$