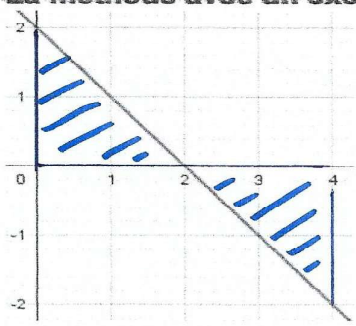
Comment calculer une aire avec une fonction négative

Au début du chapitre, on a vu le lien entre une ***aire*** et l'***intégrale*** d'une ***fonction*** (implicitement) ***positive***.
La question à se poser est : **que se passe t'il si la fonction est négative ?**
En fait, le souci est que l'intégrale d'une fonction négative sur un intervalle est elle-même négative.
Et, donc, pour que cette intégrale représente une aire, il faut prendre son opposé (pour la rendre positive).

Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors : Aire sous la courbe $= \int_a^b f(x)\,dx$

Si $f \leq 0$ sur $[a;b]$ alors : Aire sous la courbe $= -\int_a^b f(x)\,dx$ ⚠

La méthode avec un exemple : avec la fonction f définie par $f(x) = -x + 2$.



On a $f(x) = -x + 2$

Donc on aura $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$

On s'intéresse à l'aire hachurée

→ on voit que cette aire est égale à 4.

On va commencer par le calcul à ne surtout pas faire

Si vous calculez $\int_0^4 f(x)\,dx$, vous allez obtenir $F(4) - F(0)$

soit $-\frac{4^2}{2} + 2\times 4 - \left(-\frac{0^2}{2} + 2\times 0\right) = 0$ ← L'aire serait nulle ? Il y a un problème, non ?

On va maintenant apprendre à faire le bon calcul

→ ***étape 1*** : on calcule l'intégrale de la fonction entre les abscisses 0 et 2 (elle sera ***positive***).

On calcule $I_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0)$

soit $-\frac{2^2}{2} + 2\times 2 - \left(-\frac{0^2}{2} + 2\times 0\right) = 2$

→ ***étape 2*** : on calcule l'intégrale de la fonction entre les abscisses 2 et 4 (elle sera ***négative***).

On calcule $I_2 = \int_2^4 f(x)\,dx = F(4) - F(2)$

soit $-\frac{4^2}{2} + 2\times 4 - \left(-\frac{2^2}{2} + 2\times 2\right) = -2$ ← l'intégrale est bien négative.

→ ***étape 3*** : on en déduit l'aire hachurée, qui sera la somme de deux aires positives (***et pas des intégrales***).

On obtient : Aire Hachurée $= A_1 + A_2 = I_1 - I_2$ ⚠

→ Aire Hachurée $= 2 - (-2) = 4$ ⚠ cette fois, tout va bien !