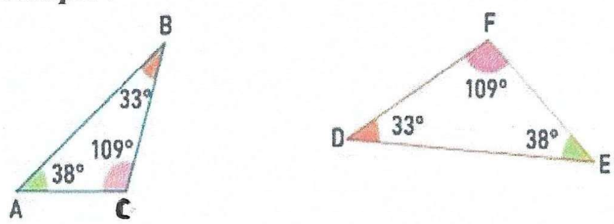
Les triangles semblables : définition , première propriété

La définition des triangles semblables

C'est la base et le point de départ de tout le travail sur ces triangles semblables.

Deux triangles sont semblables si leurs angles sont égaux deux à deux.

Exemple :



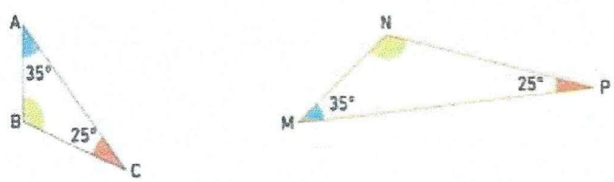
On a : $\hat{A} = \hat{E} = 38°$
$\hat{B} = \hat{D} = 33°$
$\hat{C} = \hat{F} = 109°$
Donc les triangles ABC et DEF sont semblables.

Conséquence et propriété

Cette propriété va être une conséquence d'une autre propriété sur " *la somme des trois angles d'un triangle qui est toujours égale à 180°* ".

Si on sait déjà que **deux angles** d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle , alors les deux triangles sont forcément semblables.
En fait, les troisièmes angles des deux triangles seront forcément égaux entre eux !

Exemple :

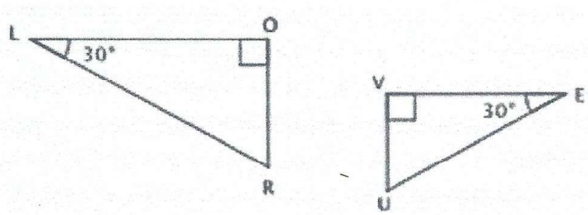


On a déjà : $\hat{C} = \hat{P} = 25°$
$\hat{A} = \hat{M} = 35°$
Et, pour chacun des triangles, le troisième angle sera égal à $180° - (35° + 25°) = 120°$
Donc les triangles ABC et MNP sont semblables.

Le cas particulier des triangles rectangles

Puiqu'il y a forcément un angle droit (90°) dans un triangle rectangle, il suffira, pour que deux triangles rectangles soient semblables, qu'ils aient **un seul autre angle** égal entre eux.

Exemple :



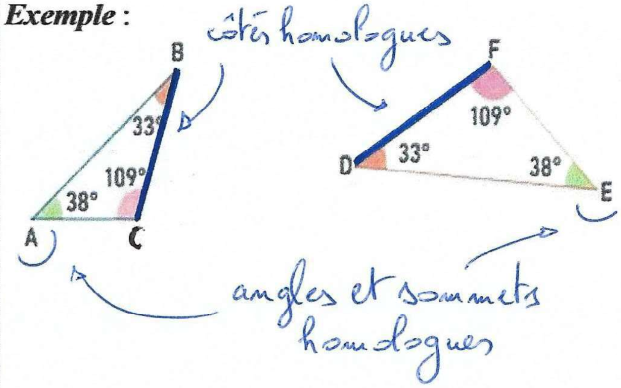
On a déjà : $\hat{O} = \hat{V} = 90°$
$\hat{L} = \hat{E} = 30°$
On a donc deux angles des triangles égaux entre eux.
Le troisième angle sera donc aussi égal → $\hat{R} = \hat{U}$
Donc les triangles LOR et VUE sont semblables.

Les triangles semblables : vocabulaire , proportionnalité

Le vocabulaire des triangles semblables

Quand on a deux triangles semblables alors on peut dire que :
- les angles qui sont égaux entre eux sont appelés "***angles homologues***".
- les sommets sur lesquels on a ces angles égaux s'appellent des "***sommets homologues***".
- les côtés qui rejoignent deux sommets ou deux angles homologues s'appellent des "***côtés homologues***".

Exemple :

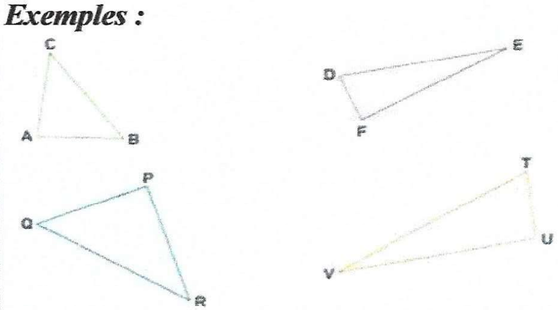


angles homologues : $\hat{A}$ et $\hat{E}$
$\hat{C}$ et $\hat{F}$
$\hat{B}$ et $\hat{D}$
sommets homologues : A et E
C et F
B et D
côtés homologues : [BC] et [FD]
[AC] et [FE]
[AB] et [ED]

Aspect visuel

On dira et on observera que deux triangles semblables ont la même forme : ils se ressemblent.
C'est comme si l'un était un agrandissement ou une réduction de l'autre.

Exemples :

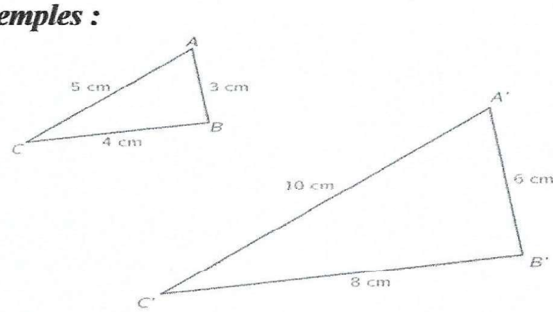


Les triangles ABC et PQR sont semblables. Ils ont la même forme (PQR a juste pivoté et il est un agrandissement du triangle ABC).
On a le même résultat pour les triangles DEF et TUV.

Proportionnalité des côtés de deux triangles semblables

On peut utiliser la notion d'agrandissement ou de réduction entre deux triangles semblables pour admettre les deux propritétés suivantes :
- si on a 2 triangles semblables alors il y a ***proportionnalité*** entre les longueurs des côtés homologues.
- inversement, si les longueurs de 2 triangles sont ***proportionnelles*** alors les 2 triangles sont semblables.

Exemples :



Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.
On constate qu'il y a un rapport de proportionnalité égal à 2 → 5cm × 2 = 10cm
4cm × 2 = 8cm
3cm × 2 = 6cm

Cette proportionnalité va être fondamentale pour toute la suite de ce chapitre.

Les triangles semblables : l'égalité des trois rapports

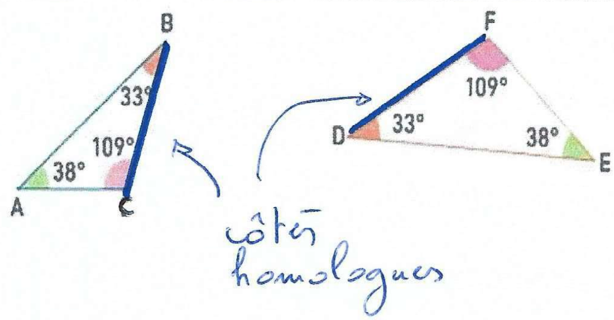
On a vu, sur une fiche précédente, le fait que les **longueurs** des côtés de deux **triangles semblables** étaient **proportionnelles** entre elles. On va formaliser ce résultat sur cette fiche avec une écriture très importante pour la suite : c'est l'égalité des trois rapports.

L'égalité des trois rapports

Cette égalité va traduire la proportionnalité entre les longueurs des côtés homologues de deux triangles semblables. Pour bien écrire cette ***égalité des trois rapports***, il faut :

- bien repérer les ***côtés homologues*** des deux triangles semblables.
- on fait le choix, en général, d'écrire les rapports en écrivant les longueurs du "*petit*" triangle sur les longueurs du "*grand*" triangle. L'intérêt est surtout de bien respecter ***toujours le même ordre*** entre le "*petit*" et le "*grand*".

Pour les triangles semblables suivants, on pourra écrire :



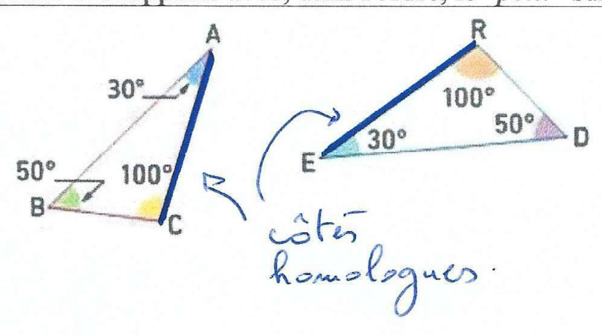
côtés homologues : [BC] et [FD]
[AC] et [FE]
[AB] et [ED]

On a l'égalité des trois rapports :

$$\frac{BC}{FD} = \frac{AC}{FE} = \frac{AB}{ED}$$

D'autres exemples

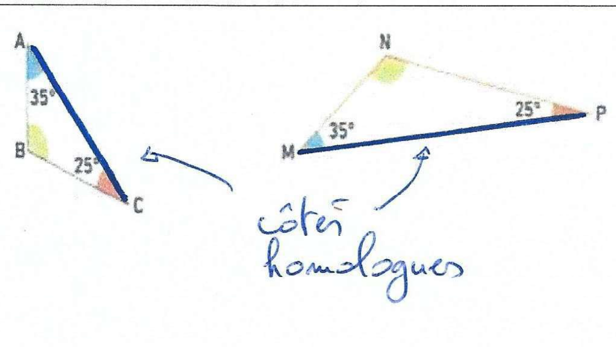
Pour le moment, on va juste écrire cette égalité des trois rapports pour quelques exemples.
On s'appliquera à bien repérer, à chaque fois, deux côtés homologues et on gardera le principe initial d'écrire des rapports avec, dans l'ordre, le "*petit*" sur le "*grand*".



côtés homologues : [AC] et [ER]
[AB] et [ED]
[BC] et [RD]

On a l'égalité des trois rapports :

$$\frac{AC}{ER} = \frac{AB}{ED} = \frac{BC}{RD}$$



côtés homologues : [AC] et [MP]
[AB] et [MN]
[BC] et [NP]

On a l'égalité des trois rapports :

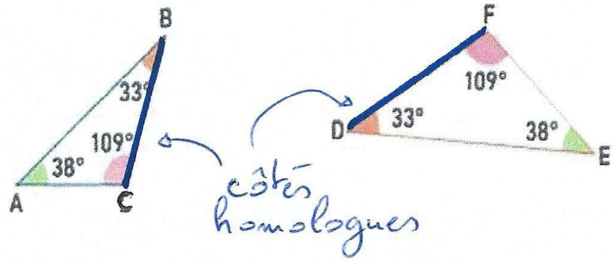
$$\frac{AC}{MP} = \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$$

Comment calculer une longueur avec des triangles semblables : la méthode avec un exemple

Une fois que vous aurez bien repéré des *triangles semblables*, vous pourrez écrire l'*égalité des trois rapports*. Cela nous permettra alors de calculer une des longueurs d'un triangle sachant qu'il faudra que l'on connaisse trois autres longueurs.

En résumé → ***triangles semblables + 3 longueurs connues = on peut calculer une quatrième longueur***

Exemple de référence avec la méthode détaillée



On donne les longueurs BC = 10 cm ; FD = 16 cm ; AC = 8 cm ; ED = 24 cm .
On veut calculer la longueur EF, et la longueur AB.

On vérifie que les hypothèses donnant des *triangles semblables* sont bien là et on repère les *côtés homologues* !

Les triangles ABC et FED sont semblables car leurs angles sont égaux deux à deux ($\hat{A} = \hat{E}$; $\hat{C} = \hat{F}$; $\hat{B} = \hat{D}$).
Les côtés homologues sont : [AC] et [FE]
[BC] et [FD]
[AB] et [ED]

On écrit l'*égalité des trois rapports.*

$$\frac{BC}{FD} = \frac{AC}{FE} = \frac{BA}{DE}$$

On ***remplace*** les longueurs par leur valeur numérique.

$$\frac{10}{16} = \frac{8}{FE} = \frac{BA}{24}$$

On isole deux rapports afin de trouver la longueur cherchée à l'aide d'un produit en croix.

pour le calcul de FE.

On a : $\frac{10}{16} = \frac{8}{FE}$

Donc $FE = (16 \times 8) : 10$

→ FE = 12,8 cm

pour le calcul de BA.

On a : $\frac{10}{16} = \frac{BA}{24}$

Donc $BA = (10 \times 24) : 16$

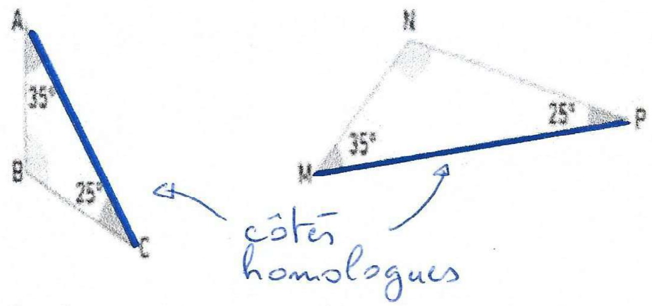
→ BA = 15 cm

Comment calculer une longueur avec des triangles semblables : un autre exemple

Une fois que vous aurez bien repéré des *triangles semblables*, vous pourrez écrire l'*égalité des trois rapports*. Cela nous permettra alors de calculer une des longueurs d'un triangle sachant qu'il faudra que l'on connaisse trois autres longueurs.

En résumé → ***triangles semblables + 3 longueurs connues = on peut calculer une quatrième longueur***

Un nouvel exemple avec la méthode détaillée



On donne les longueurs BC = 2,5 cm ; NP = 4 cm ; AB = 2 cm ; MP = 6 cm .

On veut calculer la longueur MN , et la longueur AC.

On vérifie que les hypothèses donnant des *triangles semblables* sont bien là et on repère les *côtés homologues* !

Les triangles ABC et MNP sont semblables car leurs angles sont égaux deux à deux ($\hat{A} = \hat{M}$; $\hat{C} = \hat{P}$; $\hat{B} = \hat{N}$)

Les côtés homologues sont : [AC] et [MP]
[BC] et [NP]
[AB] et [MN]

On écrit l'*égalité des trois rapports.*

$$\frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = \frac{AB}{MN}$$

On ***remplace*** les longueurs par leur valeur numérique.

$$\frac{AC}{6} = \frac{2,5}{4} = \frac{2}{MN}$$

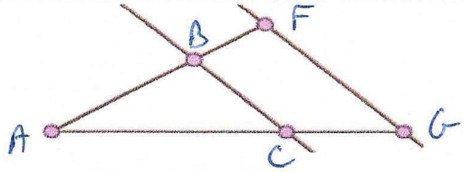
On isole deux rapports afin de trouver la longueur cherchée à l'aide d'un produit en croix.

pour le calcul de MN.	pour le calcul de AC.
On a : $\frac{2,5}{4} = \frac{2}{MN}$	On a : $\frac{AC}{6} = \frac{2,5}{4}$
Donc $MN = (4 \times 2) : 2,5$	Donc $AC = (6 \times 2,5) : 4$
→ $MN = 3,2$ cm	→ $AC = 3,75$ cm

Un cas particulier de triangles semblables : la configuration de Thalès

Ce cas particulier est fondamental. Il va faire le lien avec le chapitre de 3e sur le *théorème de Thalès*.

On découvre cette configuration

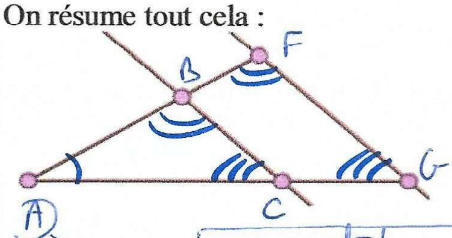


On suppose dans cette *configuration* que les droites (BC) et (FG) sont parallèles.
→ on peut alors affirmer que les triangles ABC et AFG sont des ***triangles semblables***.

- en effet, l'angle $\widehat{A}$ est bien évidemment égal pour chacun des triangles ABC et AFG.
- et puisque (BC) // (FG), on en déduit que l'angle $\widehat{B}$ du triangle ABC est égal à l'angle $\widehat{F}$ du triangle AFG et que l'angle $\widehat{C}$ du triangle ABC est égal à l'angle $\widehat{G}$ du triangle AFG.

→ il faudra bien repérer les côtés homologues (en partant du POINT A , commun aux 2 triangles).

On résume tout cela :



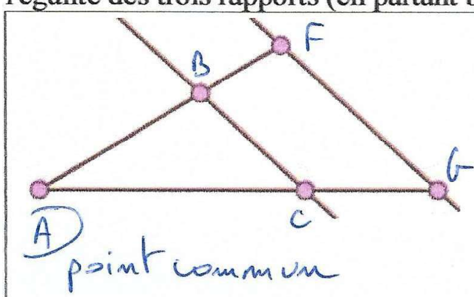
On a bien : $\widehat{A} = \widehat{A}$; $\widehat{B} = \widehat{F}$; $\widehat{C} = \widehat{G}$
Les triangles ABC et AFG sont semblables.
Les côtés homologues sont :
[AB] et [AF]
[AC] et [AG]
[BC] et [FG]

on part du point A, le point commun

Cette *configuration de Thalès* nous permettra de reconnaitre instantanément deux ***triangles semblables***.
Pour cette *configuration*, c'est un peu comme si le "*petit*" triangle était à l'intérieur du "*grand*" triangle.

Conséquence avec l'égalité des trois rapports

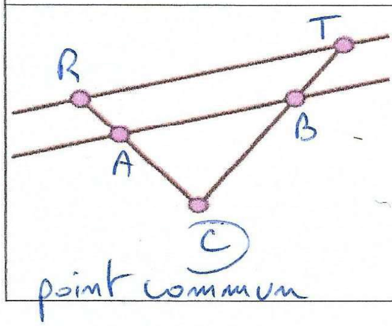
Puisque cette ***configuration de Thalès*** nous fournit deux ***triangles semblables***, on pourra donc écrire l'égalité des trois rapports (en partant bien, pour les côtés homologues, du point commun aux 2 triangles).



Les côtés homologues sont : [AB] et [AF]
[AC] et [AG]
[BC] et [FG]

L'égalité des trois rapports s'écrit :

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AG} = \frac{BC}{FG}$$



Les côtés homologues sont : [CA] et [CR]
[CB] et [CT]
[AB] et [RT]

L'égalité des trois rapports s'écrit :

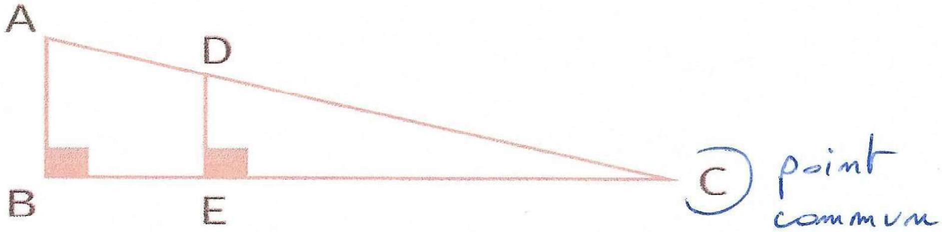
$$\frac{CA}{CR} = \frac{CB}{CT} = \frac{AB}{RT}$$

Comment calculer une longueur avec une configuration de Thalès : un exemple

Une fois que vous aurez bien repéré une ***configuration de Thalès*** et donc des ***triangles semblables***, vous pourrez écrire l'*égalité des trois rapports*. Cela nous permettra alors de calculer une des longueurs d'un triangle sachant qu'il faudra que l'on connaisse trois autres longueurs.

En résumé → ***configuration de Thalès + 3 longueurs connues = on calcule une quatrième longueur***

Exemple de référence avec la méthode détaillée



On donne les longueurs CE = 15 cm ; CB = 24 cm ; DE = 12 cm ; CA = 36 cm .

On veut calculer la longueur AB, et la longueur CD.

On vérifie que l'on a bien les hypothèses d'une *configuration de Thalès* et on repère les *côtés homologues*.

Les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires à une même troisième droite (BC) → elles sont donc parallèles entre elles.

On a donc (AB) // (DE) et on reconnait une configuration de Thalès.

Les côtés homologues sont : [CE] et [CB]

[CD] et [CA]

[ED] et [AB]

on part bien du point C, le point commun

On écrit l'*égalité des trois rapports.*

$$\frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA} = \frac{ED}{BA}$$

On ***remplace*** les longueurs par leur valeur numérique.

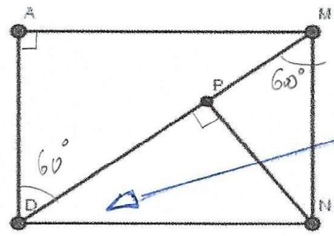
$$\frac{15}{24} = \frac{CD}{36} = \frac{12}{BA}$$

On isole deux rapports afin de trouver la longueur cherchée à l'aide d'un produit en croix.

pour le calcul de CD.	pour le calcul de AB.
On a : $\frac{15}{24} = \frac{CD}{36}$	On a : $\frac{15}{24} = \frac{12}{AB}$
Donc $CD = (15 \times 36) : 24$	Donc $AB = (24 \times 12) : 15$
→ $CD = 22,5$ cm	→ $AB = 19,2$ cm

Ce chapitre sur les triangles semblables n'est pas celui que l'on retrouve le plus souvent le jour du Brevet mais cela vaut, quand même, le coup de s'entrainer avec des énoncés déjà posés le jour J.

Enoncé 1 : Pour construire un décor de théatre, Bruno dispose d'une plaque rectangulaire dans laquelle il découpe les trois triangles du décor. On sait que $\widehat{ADM} = \widehat{PMN} = 60°$.



$\widehat{NDP} = 90° - 60° = 30°$ (angle droit $\widehat{ADN}$ − angle $\widehat{ADM}$)

Bruno veut que les triangles ADM, DNP et MPN soient semblables. Est ce bien le cas ?

Dans le triangle ADM, on a $\widehat{ADM} = \boxed{60°}$ et $\widehat{DAM} = \boxed{90°}$

→ $\widehat{AMD} = 180° - (60° + 90°) = \boxed{30°}$ avec la somme des angles d'un triangle.

Dans le triangle MPN, on a $\widehat{NPM} = \boxed{90°}$ et $\widehat{PMN} = \widehat{ADM} = \boxed{60°}$

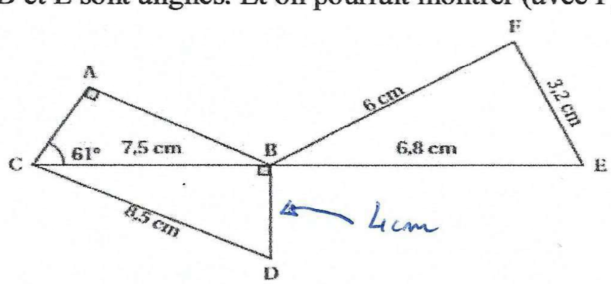
→ $\widehat{PNM} = \boxed{30°}$ en utilisant encore la somme des angles d'un triangle.

Dans le triangle NPD, on a $\widehat{DPN} = \boxed{90°}$ et $\widehat{NDP} = \boxed{30°}$ (voir ci-dessus)

→ $\widehat{PND} = 180° - (30° + 90°) = \boxed{60°}$ avec la somme des angles d'un triangle.

Les triangles ADM, DNP et MPN ont leurs angles égaux respectivement à 90°, 60° et 30° → les trois triangles sont semblables.

Enoncé 2 : Les points C, B et E sont alignés. Et on pourrait montrer (avec Pythagore) que BD = 4 cm.



Montrer alors que les triangles CBD et BFE sont semblables.

On s'intéresse à la proportionnalité des côtés des triangles.

→ $\frac{BD}{FE} = \frac{4}{3,2} = 1,25$ $\quad \frac{BC}{FB} = \frac{7,5}{6} = 1,25$ $\quad \frac{DC}{BE} = \frac{8,5}{6,8} = 1,25$

→ les résultats sont égaux → il y a bien proportionnalité.

Les triangles BCD et BFE sont donc semblables.