Corrigé

de l'épreuve commune e3c

de mathématiques

en Première Spécialité Maths

Spécimen 1 pour préparer le bac 2021

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 :

① on a $U_1 = 1$; $U_2 = 2$; $U_3 = 4$; $U_4 = 8$ et $U_5 = 8 \times 2 = 16$.

② on multiplie par 2 à chaque fois

→ on a $U_{n+1} = 2 \times U_n$ ou $U_{n+1} = 2U_n$

③ (U_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $U_1 = 1$.

On a alors : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$ ← ne pas oublier ce 1 !

→ $U_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

④ Le nombre total de grains de riz est égal à :

$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_{64}$

= somme de termes d'une suite géométrique

$= U_1 \times \dfrac{1 - q^{64}}{1 - q} = 1 \times \dfrac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1$

$\approx 1{,}8 \times 10^{19}$

cela représente donc un total de $1{,}8 \times 10^{19}$ grain de riz !

→ n'hésitez pas à chercher l'équivalent en Tonnes puis en euros !!

⑤ on a ici des instructions très classiques d'algorithme ou de programme Python.

→ on veut que ce programme "tourne" tant que la somme des grains ne passe pas au dessus de R.

→ on complète les pointillés

```
while somme ... < R
      u = .... 2*u
  somme = .... somme + u
```

Exercice 2 :

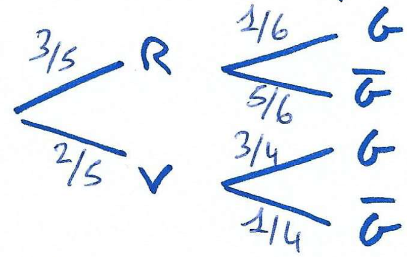
① il y a 10 jetons en tout : 6 rouges et 4 verts

$\rightarrow p(R) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ et $p(V) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Et parmi les jetons rouges, on a $P_R(G) = \frac{1}{6}$.

Et parmi les jetons verts, on a $P_V(G) = \frac{3}{4}$.

On obtient l'arbre :



② on cherche $P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

③ on applique la formule des probabilités totales.

$$P(G) = P(R \cap G) + p(V \cap G)$$
$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

④ on cherche $P_G(R) = \frac{P(G \cap R)}{P(G)} = \frac{3/5 \times 1/6}{2/5} = \frac{1}{4}$

⑤ Cette question me semble hors programme car elle utilise les combinaisons de Terminale.

→ le nombre de possibilités de tirer deux jetons "gagnant" parmi les quatre "gagnant" est égal à :

$\binom{4}{2}$ = c'est une combinaison = 6.

→ le nombre total de tirages $\underline{\text{simultanés}}$ de deux jetons parmi dix jetons est égal à :

$\binom{10}{2}$ = c'est une combinaison = 45.

On obtiendrait une probabilité de $\frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

Exercice 3 :

① on a $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$

$\longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 14x + 11$

② Pour résoudre $3x^2 + 14x + 11 > 0$,

on commence par résoudre l'équation

$3x^2 + 14x + 11 = 0 \longrightarrow$ $a = 3$, $b = 14$, $c = 11$

on a : $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 3 \times 11$

$\longrightarrow \Delta = 64 > 0$

Il y a donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-14-\sqrt{64}}{2 \times 3}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-14+\sqrt{64}}{2 \times 3}$

$\rightarrow x_1 = -\dfrac{11}{3}$ $\qquad \rightarrow x_2 = -1$

Enfin, on a $\boxed{a=3}$ qui est positif et le tableau de signes du trinôme sera du type

	$-11/3$		-1	
+	0	−	0	+

Pour l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$,

on obtient $S =]-\infty ; -\frac{11}{3}[\cup]-1 ; +\infty[$

et on obtient le tableau suivant

x	$-\infty$		$-11/3$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

③ c'est juste ici une question de cours !

$\rightarrow$ on aura : $y = \underbrace{f'(0)}_{11} \times (x - 0) + \underbrace{f(0)}_{-19}$

soit $y = 11x - 19$

④ on remplace x par 1.

on obtient $1^3+7\times1^2+11\times1-19$
$= 1+7+11-19 = 0$!

$\rightarrow$ 1 est bien solution de $x^3+7x^2+11x-19=0$

* pour vérifier $f(x)=(x-1)(x^2+8x+19)$,
on part de $(x-1)(x^2+8x+19)$ que l'on développe.

On obtient : $(x-1)(x^2+8x+19)$
$= x^3+8x^2+19x-x^2-8x-19$
$= x^3+7x^2+11x-19 = f(x)$.

⑤ pour étudier le signe de f, on étudie donc le signe de $(x-1)$ et le signe de $x^2+8x+19$

fonction affine

trinôme

on résout $x^2+8x+19=0$

$a=1$
$b=8$
$c=19$

$\Delta = b^2-4ac = 8^2-4\times1\times19$

$\rightarrow \Delta = -12 < 0$

$\rightarrow$ pas de racine
et signe constant (positif car $\boxed{a=1}$ est positif)

On en déduit le tableau de signes de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x^2+8x+19$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 4 :

① on remplace x et y par les coordonnées de A et de B.

→ pour le point A : $\underset{x_A}{3} + 3 \times \underset{y_A}{1} - 6 = 3 + 3 - 6 = 0$

→ pour le point B : $-\underset{x_B}{3} + 3 \times \underset{y_B}{3} - 6 = -3 + 9 - 6 = 0$

Donc la droite passe bien par A et B.

Donc c'est bien la droite (AB).

② Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sera un vecteur normal à cette droite d.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A = -3 - 3 = -6 \\ y_B - y_A = 3 - 1 = 2 \end{vmatrix}$ correspond à $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ vecteur normal

La droite d s'écrira : $-6x + 2y + c = 0$

or le point C vérifie cette équation.

Donc on remplace x et y par les coordonnées de C.

$-6 \times 2 + 2 \times 4 + c = 0 \longrightarrow c = +4$

L'équation cartésienne de la droite d est :

$$-6x + 2y + 4 = 0$$

③ on note x et y les coordonnées du point K.

Le point doit vérifier deux conditions :

- $\overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{AB}$ soit $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
- $K \in (AB)$ soit $x + 3y - 6 = 0$ c'est l'équation de (AB)

or $\overrightarrow{CK} \begin{vmatrix} x-2 \\ y-4 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} -6 \\ 2 \end{vmatrix}$
$= -6(x-2) + 2(y-4)$
$= -6x + 12 + 2y - 8$
$= -6x + 2y + 4$

On veut donc $\begin{cases} -6x + 2y + 4 = 0 \\ x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$

On doit résoudre ce système de 2 équations à 2 inconnues → revoir la méthode !!

On obtient les coordonnées de K avec $x = \frac{6}{5}$

et $y = \frac{8}{5}$

④ on applique une formule du cours

$$\rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3-3)^2 + (3-1)^2}$$

soit $AB = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$

Pour le milieu, on applique une autre formule du cours

$$M \left| \begin{array}{l} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{array} \right. \rightarrow M \left| \begin{array}{l} \frac{3 + (-3)}{2} \\ \frac{1 + 3}{2} \end{array} \right. \rightarrow M \left| \begin{array}{l} 0 \\ 2 \end{array} \right.$$

⑤ Le centre de ce cercle est le point M et son rayon est égal à la moitié du diamètre [AB]

$$\rightarrow (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2$$

soit $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{\sqrt{40}}{2}\right)^2$

soit $x^2 + (y-2)^2 = 10$

c'est l'équation du cercle de diamètre [AB]