Les fonctions composées : définition , dérivation

Un exemple à bien maitriser

Pour étudier une fonction, on commence toujours par travailller avec la variable x , ce qui donne pour la fonction exponentielle $x \to e^{x}$.

Mais si à la place de x , on a une expression s'écrivant avec cette variable x , par exemple $x \to e^{2x+3}$, alors on a ce que l'on appelle une ***fonction composée***.

La notation communément utilisée est alors $x \to f(u(x))$ ou plus simplement $f(u)$.

Comment bien reconnaitre la fonction *u* pour une fonction composée

Déjà, vous n'oublierez pas que l'utilisation de cette lettre u n'est qu'une convention et une notation.

Par exemple, il ne faut pas confondre l'utilisation de cette lettre pour les fonctions composées $f(u)$ avec celle pour la dérivation d'un produit de fonction $(uv)'$.

Ensuite, dans une ***fonction composée*** , la fonction notée u sera la "*petite*" fonction qui se trouve "*à l'intérieur*" de la fonction "*principale*" f.

Si on faisait un calcul numérique, en remplaçant x , la fonction u serait celle que l'on calculerait en premier et la fonction f correspond à celle que l'on appliquerait en dernier .

Avec $f(x) = e^{2x+3}$, on a $u(x) = 2x + 3$ "*à l'intérieur*" de la fonction exponentielle $u \to e^{u}$.
Avec $f(x) = (5x - 4)^2$, on a $u(x) = 5x - 4$ "*à l'intérieur*" de la fonction carrée $u \to (u)^2$
Avec $f(x) = \sqrt{4x^2+1}$, on a $u(x) = 4x^2 + 1$ "*à l'intérieur*" de la fonction racine carrée $u \to \sqrt{u}$.

La dérivée d'une fonction composée

Rassurez vous, on n'aura ici aucune nouvelle formule de dérivation. Mais il faudra, par contre, bien connaitre TOUTES les dérivées des fonctions usuelles. Ensuite, le principe est très simple :

On dérive la fonction principale comme si c'était avec x.
MAIS on écrit cette dérivée en mettant la petite fonction u à l'intérieur.
ET on n'oublie pas de multiplier ensuite par la dérivée u ' de la "petite" fonction.
Cela se note de la façon suivante : $(f(u))' = f'(u) \times u'$

La dérivée de ...	*Avec la variable x*	*La dérivée de ...*	*Avec une fonction u*
x^2	$2x$	u^2	$2u \times u'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$ soit $\frac{u'}{\sqrt{u}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \times u'$ soit $\frac{-u'}{u^2}$
e^x	e^x	e^u	$e^u \times u'$ soit $u'e^u$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{1}{u} \times u'$ soit $\frac{u'}{u}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-\sin u \times u'$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$\cos u \times u'$

Comment calculer la dérivée d'une fonction composée : des exemples (1)

On rappelle la formule générale (de la fiche précédente)

On dérive la fonction principale comme si c'était avec x.
MAIS on écrit cette dérivée en mettant la petite fonction u à l'intérieur.
ET on n'oublie pas de multiplier ensuite par la dérivée u ' de la "petite" fonction.
Cela se note de la façon suivante : $(f(u))' = f'(u) \times u'$

Des exemples pour la dérivée d'une fonction composée

→ **avec** $f(x) = (3x+1)^2$ $\rightarrow u^2$ avec $u(x) = 3x+1$ et $u'(x) = 3$

On a $f'(x) = 2u \times u' = 2(3x+1) \times 3 = 6(3x+1)$

→ **avec** $f(x) = 6(4x^2+5x+2)^3$ $\rightarrow 6u^3$ avec $u(x) = 4x^2+5x+2$
et $u'(x) = 8x+5$

On a $f'(x) = 6 \times 3u^2 \times u' = 6 \times 3(4x^2+5x+2) \times (8x+5)$
$= 18(8x+5)(4x^2+5x+2)$

→ **avec** $f(x) = \sqrt{5x+3}$ $\rightarrow \sqrt{u}$ avec $u'(x) = 5x+3$ et $u'(x) = 5$

On a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \times u' = \dfrac{1}{2\sqrt{5x+3}} \times 5 = \dfrac{5}{2\sqrt{5x+3}}$

→ **avec** $f(x) = 7\sqrt{5x^2+6}$ $\rightarrow 7\sqrt{u}$ avec $u(x) = 5x^2+6$ et $u'(x) = 10x$

On a $f'(x) = 7 \times \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \times u' = 7 \times \dfrac{1}{2\sqrt{5x^2+6}} \times 10x = \dfrac{35x}{\sqrt{5x^2+6}}$

→ **avec** $f(x) = \dfrac{1}{4x+3}$ $\rightarrow \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 4x+3$ et $u'(x) = 4$

On a $f'(x) = -\dfrac{1}{u^2} \times u' = -\dfrac{1}{(4x+3)^2} \times 4 = \dfrac{-4}{(4x+3)^2}$

→ **avec** $f(x) = \dfrac{4}{3x^2+1}$ $\rightarrow \dfrac{4}{u}$ avec $u(x) = 3x^2+1$ et $u'(x) = 6x$

On a $f'(x) = 4 \times \dfrac{-1}{u^2} \times u' = 4 \times \dfrac{-1}{(3x^2+1)^2} \times 6x = \dfrac{-24x}{(3x^2+1)^2}$

Comment calculer la dérivée d'une fonction composée : des exemples (2)

Vous trouverez la formule générale de la dérivée d'une fonction composée sur les fiches précédentes.

→ avec $f(x) = \cos(5x-2)$ → $\cos u$ avec $u(x) = 5x-2$ et $u'(x) = 5$

On a $f'(x) = -\sin u \times u' = -5\sin(5x-2)$

→ avec $f(x) = \sin(4x-1)$ → $\sin u$ avec $u(x) = 4x-1$ et $u'(x) = 4$

On a $f'(x) = \cos u \times u' = 4\cos(4x-1)$

→ avec $f(x) = e^{2x+3}$ → e^u avec $u(x) = 2x+3$ et $u'(x) = 2$

On a $f'(x) = e^u \times u' = 2e^{2x+3}$

→ avec $f(x) = 3e^{x^2}$ → $3e^u$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$

On a $f'(x) = 3e^u \times u' = 3e^{x^2} \times 2x = 6xe^{x^2}$

→ avec $f(x) = 7e^{3x^2+4x+2}$ → $7e^u$ avec $u(x) = 3x^2+4x+2$

$u'(x) = 6x+4$

On a $f'(x) = 7e^u \times u' = 7(6x+4)e^{3x^2+4x+2}$

→ avec $f(x) = e^{-x}$ → e^u avec $u(x) = -x$ et $u'(x) = -1$

On a $f'(x) = e^u \times u' = e^{-x} \times (-1) = -e^{-x}$

→ avec $f(x) = \ln(4x+2)$ → $\ln u$ avec $u(x) = 4x+2$ et $u'(x) = 4$

On a $f'(x) = \dfrac{1}{u} \times u' = \dfrac{1}{4x+2} \times 4 = \dfrac{4}{4x+2}$

→ avec $f(x) = 6\ln(5x^2)$ → $6\ln u$ avec $u(x) = 5x^2$ et $u'(x) = 10x$

On a $f'(x) = 6 \times \dfrac{1}{u} \times u' = \dfrac{6 \times 10x}{5x^2} = \dfrac{12}{x}$

→ avec $f(x) = 3\ln(x^2+2x+1)$ → $3\ln u$ avec $u(x) = x^2+2x+1$

et $u'(x) = 2x+2$

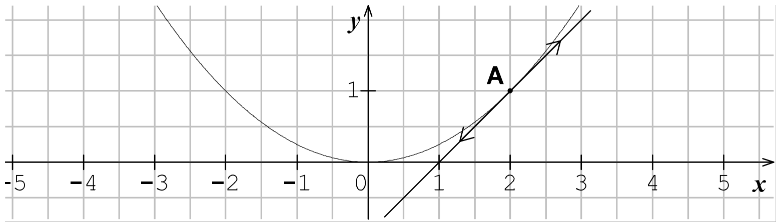
On a $f'(x) = 3 \times \dfrac{1}{u} \times u' = \dfrac{3(2x+2)}{x^2+2x+1}$

Fonction convexe ou concave : aspect graphique , point d'inflexion

C'est la courbure de la courbe que l'on va étudier ici, et on va visuellement voir ici si la fonction est ***convexe*** *sur un intervalle* ou si elle est ***concave*** *sur un intervalle*.
Vous allez vite voir le lien avec vos souvenirs sur les paraboles et les trinômes !

Un exemple de fonction convexe

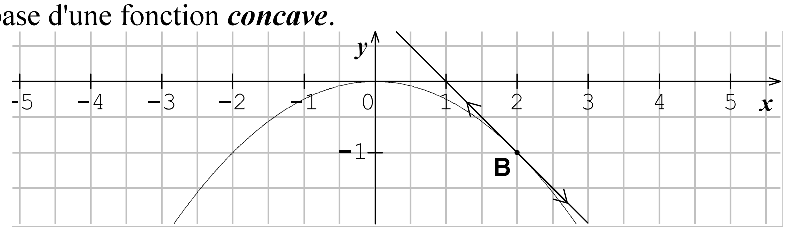
Voici l'exemple de base d'une fonction ***convexe***.



Ces fonctions *convexes* auront leur courbure comme les paraboles en "*smiley*" des trinômes dont le coefficient "*a*" est positif.
On a placé sur cette courbe un point A avec sa tangente : on peut observer que, pour une fonction *convexe*, la courbe se situera toujours "*au-dessus*" de ses tangentes.

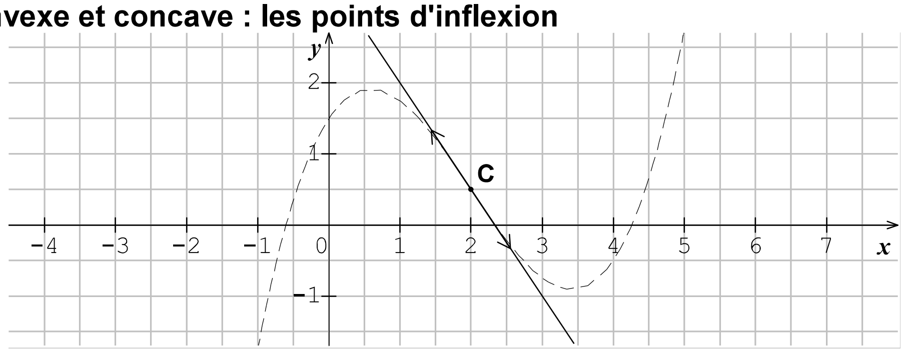
Un exemple de fonction concave

Voici l'exemple de base d'une fonction ***concave***.



Ces fonctions *concaves* auront leur courbure comme les paraboles en "*non smiley*" des trinômes dont le coefficient "*a*" est négatif.
On a placé sur cette courbe un point B avec sa tangente : on peut observer que, pour une fonction *concave*, la courbe se situera toujours "*en-dessous*" de ses tangentes.

Fonction convexe et concave : les points d'inflexion



Vous devez observer sur cette courbe que :

- la courbe est *concave* sur l'intervalle] - ∞ ; 2] , c'est à dire jusqu'au point C.
- la courbe est *convexe* sur l'intervalle [2 ; + ∞ [, c'est à dire à partir du point C.
- ce point C pour lequel la courbe passe de concave à convexe s'appelle un ***point d'inflexion***.
- la courbe traverse la tangente en ce point C car, sur sa partie *concave*, la courbe est "*en dessous*" de la tangente et, sur sa partie *convexe*, la courbe est "*au dessus*" de la tangente.

On aura un (ou plusieurs) ***point d'inflexion*** sur une courbe, à chaque fois que la fonction passe de *concave* à *convexe* ou qu'elle passe de *convexe* à *concave*.
Sur chaque ***point d'inflexion***, on aura la courbe qui traverse la tangente en ce point.

Comment montrer qu'une fonction est convexe ou concave : la méthode

On va voir, sur cette fiche, la méthode la plus pratique et, donc, la plus facile à mettre en place.

Définition

En supposant que les fonctions concernées soient dérivables sans souci,
on appelle ***dérivée seconde*** d'une fonction f, et on la note f'', la dérivée de la fonction dérivée f'.
Cela signifie que l'on dérive deux fois la fonction f.
Ou que l'on dérive la fonction f pour obtenir f', et que l'on dérive ensuite f' pour obtenir f''.

Le théorème que l'on va utiliser

Pour une fonction supposée deux fois dérivable ,
une fonction f est *convexe* sur un intervalle I si et seulement si la dérivée seconde f'' est positive sur I
et
une fonction f est *concave* sur un intervalle I si et seulement si la dérivée seconde f'' est négative sur I

La méthode avec un exemple

Pour savoir sur quel intervalle une fonction est *convexe* ou *concave* :
- on dérive deux fois la fonction f afin d'obtenir la ***dérivée seconde*** f''.
- on étudie le signe de cette fonction f'' et on fait son ***tableau de signes***.
- lorsque la dérivée seconde f'' est ***positive*** , la fonction est ***convexe***.
- lorsque la dérivée seconde f'' est ***négative*** , la fonction est ***concave***.

Exemple : on considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 12x + 12$
On va déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est *convexe* ou *concave* .

→ **étape 1** : on calcule la ***dérivée seconde*** f''

On a $f'(x) = 6x^2 - 24x + 12$
et $f''(x) = 12x - 24$

→ **étape 2** : on fait le ***tableau de signes*** de cette dérivée seconde f'' et on conclut que la fonction f est ***convexe*** lorsque f'' est ***positive*** ou que la fonction f est ***concave*** lorsque f'' est ***négative***.

on résout $12x - 24 = 0$ et on applique la règle des signes d'une fonction affine

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signes de f''		$-$	0	$+$	
fonction f		CONCAVE	|	CONVEXE	

c'est un point d'inflexion

→ **conclusion** : la fonction est ***concave*** sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ et ***convexe*** sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.
Il y a donc un ***point d'inflexion*** au point d'abscisse 2 (et d'ordonnée $f(2) = 4$).

Il existe un théorème faisant le lien entre les variations de la dérivée f' et le fait que la fonction f soit concave ou convexe (si f' est croissante alors f est convexe , si f' est décroissante alors f est concave). Mais, dans la pratique, c'est bien le théorème énoncé au début de cette fiche que l'on utilise.

Comment montrer qu'une fonction est convexe ou concave : exemples (1)

L'énoncé de l'exercice

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x^2 - 8x + 17)e^x$
a) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.
b) Calculer $f''(x)$ et déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est concave ou convexe.
En déduire les points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

Solution de cet exercice

a) on calcule la dérivée f' en appliquant la formule $(uv)' = u'v + uv'$

On a $f'(x) = (2x-8)e^x + (x^2-8x+17)e^x = (x^2-6x+9)e^x$
→ le discriminant de x^2-6x+9 est nulle
→ ce trinôme a donc une seule racine.

n'oublions pas que e^x est positif, pour tout x

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↗	

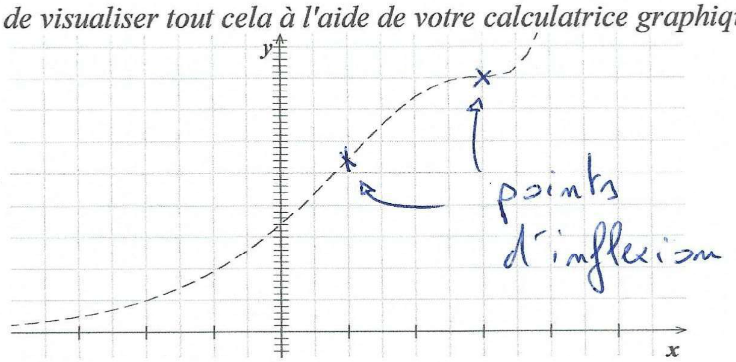
b) on calcule la dérivée seconde f'' en partant de $f'(x) = (x^2 - 6x + 9)e^x$

On a $f''(x) = (2x-6)e^x + (x^2-6x+9)e^x = (x^2-4x+3)e^x$
→ le discriminant de x^2-4x+3 est positif
→ ce trinôme a donc deux racines : 1 et 3.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		CONVEXE	|	CONCAVE	|	CONVEXE	

points d'inflexion

Et surtout, n'oubliez pas de visualiser tout cela à l'aide de votre calculatrice graphique !



Comment montrer qu'une fonction est convexe ou concave : exemples (2)

L'énoncé de l'exercice

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

a) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

b) Calculer $f''(x)$ et déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est concave ou convexe.
En déduire les points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

Solution de cet exercice

a) on calcule la dérivée f' en appliquant la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

On a $f'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ → $f'(x)$ est du signe de $(x-1)$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\|\|$	↘		↗	

← valeur interdite

b) on calcule la dérivée seconde f'' en partant de $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ *(soyez patient, elle est difficile)*

On a $f''(x) = \dfrac{(e^x(x-1) + e^x)x^2 - e^x(x-1) \times 2x}{x^4}$

→ $f''(x) = \dfrac{x^3 e^x - 2(x-1)x e^x}{x^4} = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$

Le trinôme $x^2 - 2x + 2$ est toujours positif, $f''(x)$ est du signe de x^3

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$		CONCAVE	$\|\|$	CONVEXE	

↑ valeur interdite

Et surtout, n'oubliez pas de visualiser tout cela à l'aide de votre calculatrice graphique !