Les fonctions composées : définition , dérivation

Un exemple à bien maitriser

Pour étudier une fonction, on commence toujours par travailller avec la variable x , ce qui donne pour la fonction exponentielle $x \to e^{x}$.

Mais si à la place de x , on a une expression s'écrivant avec cette variable x , par exemple $x \to e^{2x+3}$, alors on a ce que l'on appelle une ***fonction composée***.

La notation communément utilisée est alors $x \to f(u(x))$ ou plus simplement $f(u)$.

Comment bien reconnaitre la fonction *u* pour une fonction composée

Déjà, vous n'oublierez pas que l'utilisation de cette lettre u n'est qu'une convention et une notation.

Par exemple, il ne faut pas confondre l'utilisation de cette lettre pour les fonctions composées $f(u)$ avec celle pour la dérivation d'un produit de fonction $(u\,v)'$.

Ensuite, dans une ***fonction composée*** , la fonction notée u sera la "*petite*" fonction qui se trouve "*à l'intérieur*" de la fonction "*principale*" f .

Si on faisait un calcul numérique, en remplaçant x , la fonction u serait celle que l'on calculerait en premier et la fonction f correspond à celle que l'on appliquerait en dernier .

Avec $f(x) = e^{2x+3}$, on a $u(x) = 2x + 3$ "*à l'intérieur*" de la fonction exponentielle $u \to e^{u}$.
Avec $f(x) = (5x - 4)^2$, on a $u(x) = 5x - 4$ "*à l'intérieur*" de la fonction carrée $u \to (u)^2$
Avec $f(x) = \sqrt{4x^2+1}$, on a $u(x) = 4x^2 + 1$ "*à l'intérieur*" de la fonction racine carrée $u \to \sqrt{u}$.

La dérivée d'une fonction composée

Rassurez vous, on n'aura ici aucune nouvelle formule de dérivation. Mais il faudra, par contre, bien connaitre TOUTES les dérivées des fonctions usuelles. Ensuite, le principe est très simple :

On dérive la fonction principale comme si c'était avec x.
MAIS on écrit cette dérivée en mettant la petite fonction u à l'intérieur.
ET on n'oublie pas de multiplier ensuite par la dérivée u ' de la "petite" fonction.
Cela se note de la façon suivante : $(f(u))' = f'(u) \times u'$

La dérivée de ...	*Avec la variable x*	*La dérivée de ...*	*Avec une fonction u*
x^2	$2x$	u^2	$2u \times u'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$ soit $\frac{u'}{\sqrt{u}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \times u'$ soit $\frac{-u'}{u^2}$
e^x	e^x	e^u	$e^u \times u'$ soit $u'e^u$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{1}{u} \times u'$ soit $\frac{u'}{u}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-\sin u \times u'$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$\cos u \times u'$