Corrigé

de l'épreuve de mathématiques

Bac Spécialité Maths

Sujet zéro (décembre 2020) pour le bac 2021

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 : Les bonnes réponses à ce QCM sont :

1. b) 2. c) 3. c) 4. c) 5. c)

Voici quelques explications :

Question 1

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 1$

Et puisque, pour tout n, on a $U_n \leq W_n \leq V_n$, on peut appliquer le théorème des gendarmes pour la suite $W_n \rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 1$ → réponse b

Question 2 : on applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$

avec $u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1$

$v(x) = e^{x^2} \rightarrow v'(x) = \underbrace{2x}_{} e^{x^2}$

dérivation d'une fonction composée

Donc $f'(x) = 1 \times e^{x^2} + x \times 2x e^{x^2}$

$= e^{x^2}(1 + 2x^2)$ → réponse c

Question 3 : on a une forme indéterminée.

On factorise par x^2 le numérateur et le dénominateur.

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{\cancel{x^2}(1 - 1/x^2)}{\cancel{x^2}(2 - 2/x + 1/x^2)} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

on simplifie par x^2

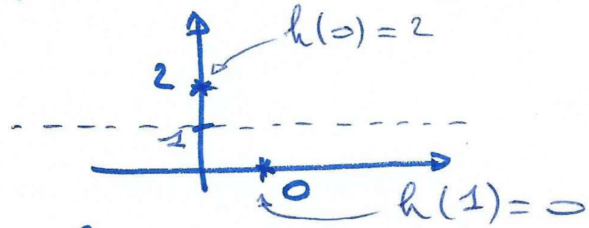
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 2$

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{2}$ → réponse c

Question 4 : chacune des affirmations a), b) et d) peut être contredite.

pour la réponse c), c'est l'application du TVI



La fonction h est continue sur $[0 ; 1]$

On a : $h(0) = 2$ et $h(1) = 0$

Le nombre 1 appartient bien à l'intervalle image $[0 ; 2]$

Donc, d'après le TVI, l'équation $f(x) = 1$ a au moins une solution sur $[0 ; 1]$ → réponse c)

Question 5 : il faut bien faire attention au fait que le graphique donné est celui de g'.

On observe que g' est croissante sur $[1 ; 2]$.

Donc g'', si elle existe, serait positive et la fonction g est donc convexe sur $[1 ; 2]$

→ réponse c)

Exercice 2 :

① ⓐ on obtient $I\begin{vmatrix}0{,}5\\0\\1\end{vmatrix}$ et $J\begin{vmatrix}2\\0\\1\end{vmatrix}$

ⓑ on a aussi $D\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$ et $G\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$

$\rightarrow \overrightarrow{DJ}\begin{vmatrix}2-0=2\\0-1=-1\\1-0=1\end{vmatrix}$ $\overrightarrow{BI}\begin{vmatrix}0{,}5-1=-0{,}5\\0-0=0\\1-0=1\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{vmatrix}1-1=0\\1-0=1\\1-0=1\end{vmatrix}$

ⓒ on va montrer, avec le produit scalaire, que $\overrightarrow{DJ}$ est $\perp$ à deux vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ non colinéaires.

$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = 2\times(-0{,}5)+(-1)\times 0+1\times 1 = -1+0+1=0$

$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 2\times 0+(-1)\times 1+1\times 1 = 0-1+1=0$

on a donc : $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$

soit $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI)

ⓓ Le vecteur $\overrightarrow{DJ}\begin{vmatrix}2\\-1\\1\end{vmatrix}$ étant un vecteur normal à (BGI), une équation cartésienne de ce plan sera :

$$2x+(-1)y+1z+d=0$$

$$\text{soit } 2x-y+z+d=0$$

Pour trouver d, on utilise les coordonnées de B :

$B\in(BGI) \rightarrow 2\times 1-0+0+d=0 \rightarrow 2+d=0$

soit $d=-2$ et, finalement, pour le plan (BGI), on a bien : $2x-y+z-2=0$.

② ⓐ La droite d est $\perp$ à (BGI)

$\rightarrow$ un vecteur directeur de d sera $\overrightarrow{DJ}$, vecteur normal au plan (BGI)

On obtient donc : $\left\{\begin{array}{l} x = \underbrace{1}_{\text{point } F} + \underbrace{2}_{\text{vecteur } \overrightarrow{DJ}}t = 1+2t \\ y = 0+(-1)t = -t \\ z = 1+1t = 1+t. \end{array}\right.$

b) Le plus simple est certainement de chercher directement les coordonnées de ce point d'intersection.

→ on remplace dans l'équation cartésienne du plan par les x, y et z de la droite.

→ $2(1+2t)-(-t)+1+t-2=0$

soit $2+4t+t+1+t-2=0$

soit $6t+1=0$ → $t=-\frac{1}{6}$

on obtient alors L $\begin{cases} x = 1+2\times(-\frac{1}{6}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ y = -(-1/6) = \frac{1}{6} \\ z = 1+(-\frac{1}{6}) = \frac{5}{6} \end{cases}$

3) a) on va calculer dans un premier temps ce volume avec : FBG comme base et (IF) comme hauteur

FBG est un triangle rectangle → Aire FBG = $\frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$

et $IF = \frac{1}{2}$

Donc $V = 1/3 \times 1/2 \times 1/2 = \frac{1}{12}$

b) Le volume reste égal si on change de base et de hauteur

→ on prend BGI comme base

et la hauteur sera donc (FL)

On calcule $FL = \sqrt{(\frac{2}{3}-1)^2+(\frac{1}{6}-0)^2+(\frac{5}{6}-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

on a : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$

→ $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times \frac{1}{\sqrt{6}}$ soit $\mathcal{B} = \frac{3\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

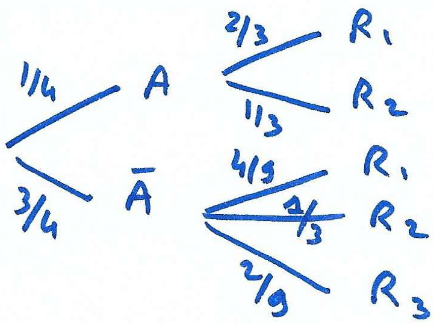
Exercice 3 : on va commencer en calculant les probabilités en utilisant l'énoncé.

$\rightarrow p(A) = \frac{75}{300} = \frac{1}{4}$ et $p_A(R_1) = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$

$\rightarrow p(\bar{A}) = \frac{3}{4}$ et $p_{\bar{A}}(R_1) = \frac{100}{225} = \frac{4}{9}$ $\quad p_{\bar{A}}(R_2) = \frac{75}{225} = \frac{1}{3}$

$$p_{\bar{A}}(R_3) = \frac{50}{225} = \frac{2}{9}$$

1) on obtient l'arbre pondéré suivant



2) a) on cherche $p(A \cap R_2) = p(A) \times p_A(R_2)$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

b) on cherche $p(R_2) \rightarrow$ on utilise la formule des probabilités totales

$$p(R_2) = p(A \cap R_2) + p(\bar{A} \cap R_2)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

c) on cherche $p_{R_2}(A) = \frac{p(R_2 \cap A)}{p(R_2)} = \frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4}$

3) a) La variable aléatoire peut prendre ici trois valeurs :

1 pour R_1 ; 2 pour R_2 ; 3 pour R_3

On a : $p(X=1) = p(R_1) = p(A \cap R_1) + p(\bar{A} \cap R_1)$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$p(X=2) = p(R_2) = \frac{1}{3}$ (question 2 !)

$p(X=3) = p(R_3) = p(\bar{A} \cap R_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{6}$

On vérifie que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$!

On obtient la loi de probabilité de X

x_i	1	2	3
p_i	$1/2$	$1/3$	$1/6$

3) On a $E(X) = \sum_i p_i x_i = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 = \frac{5}{3} \approx 1,67$

→ en moyenne, un candidat se présentera 1,67 fois à l'examen jusqu'à sa réussite.

4) a) On reconnait une loi binomiale avec
$n = 300$ et par exemple $p = p(R_3) = \frac{1}{6}$

La proba $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ correspond à l'évènement contraire de l'évènement "obtenir n fois $\overline{R_3}$"

→ cela correspond à "obtenir 0 fois $\overline{R_3}$"

→ cela correspond à "obtenir au moins une fois R_3"

soit $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = P(x \geqslant 1)$

avec x qui suit la loi binomiale $B(\underset{n}{300}\,;\,\underset{p}{\tfrac{1}{6}})$

b) Inutile de programmer ici.
On peut juste utiliser un tableau de valeurs pour voir quand $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ devient plus grand que 0,9.

On obtient : $n = 13$.

Cela signifie qu'il faut choisir au moins 13 personnes (parmi les 300 du groupe) afin d'être sûr que la probabilité, d'avoir au moins un candidat se présentant 3 fois pour réussir, soit supérieure à 0,9.

Exercice A (au choix)

Partie 1 : ① au point d'abscisse $\frac{1}{e}$, la tangente est horizontale

Donc $f'(\frac{1}{e}) = 0$.

au point d'abscisse 1, le point B, on voit que $f'(1) = -1$

② au point B d'abscisse 1, on aura :

$T_B : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\to y = -1(x-1) + 2 = -x + 1 + 2 \to y = -x + 3$

Partie 2 : ① * on a $f(\frac{1}{e}) = \dfrac{2 + \ln(\frac{1}{e})}{1/e}$

or $\ln(\frac{1}{e}) = \ln(1) - \ln(e) = 0 - 1 = -1$

D'où $f(\frac{1}{e}) = \dfrac{2 + (-1)}{1/e} = \dfrac{1}{1/e} = e$

* On a $f(1) = \dfrac{2 + \ln 1}{1} = \dfrac{2 + 0}{1} = 2$.

et on résout $f(x) = 0$ pour savoir où $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses

$\to \dfrac{2 + \ln x}{x} = 0$ soit $2 + \ln x = 0$

soit $\ln x = -2 \to x = e^{-2}$

② * pour la limite en 0^+

on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Donc on a une limite du type $\dfrac{2 + (-\infty)}{0^+}$ soit $\dfrac{-\infty}{0^+}$

D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

* pour la limite en $+\infty$

on a une limite du type $\dfrac{2 + (+\infty)}{+\infty} \to$ Forme indéterminée

on écrit $\dfrac{2 + \ln x}{x} = \dfrac{\ln x}{x}\left(2/\ln x + 1\right)$

avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (croissances comparées)

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\ln x} = 0$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) on utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = 2 + \ln x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v(x) = x \rightarrow v'(x) = 1$

D'où $f'(x) = \frac{1/x\,(x) - (2+\ln x)\times 1}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$

4) on résout $-1-\ln x = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

on obtient :

x	0		$1/e$		$+\infty$
$-1-\ln x$		$+$	0	$-$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	e	$\searrow 0$	

ces signes peuvent s'obtenir avec des valeurs test. Par exemple, 1 est à droite de $\frac{1}{e}$ et $-1-\ln 1 = -1$ négatif !

5) on résout $1 + 2\ln x = 0$

$\rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = e^{-1/2}$

on obtient le tableau de signes de f''

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$1+2\ln x$		$-$	0	$+$	
x^3		$+$		$+$	
signes de f''		$-$	0	$+$	
fonction f		CONCAVE		CONVEXE	

point d'inflexion

$[e^{-1/2} ; +\infty[$

Exercice B (au choix)

① a) on a $f(0) = 225$ (température de sortie du four)

b) on a $y' + 6y = 150 \rightarrow y' = -6y + 150$

on applique le cours sur les équations $y' = ay + b$

on obtient : $f(t) = ke^{-6t} - \dfrac{150}{-6} = ke^{-6t} + \dfrac{150}{6}$

soit $f(t) = ke^{-6t} + 25$

c) avec la condition initiale $f(0) = 225$,

on obtient $ke^{-6\times 0} + 25 = 225$

soit $k + 25 = 225 \rightarrow k = 200$

$\rightarrow$ on a bien $f(t) = 200e^{-6t} + 25$

② * avec $f(t) = 200e^{-6t} + 25$,

on a $f'(t) = 200 \times (-6) e^{-6t} = -1200 e^{-6t}$

Donc $f'(t)$ est négative pour toute valeur de t

Donc cette fonction f est bien décroissante.

* on a $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-6t} = 0$

Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 25$

Donc cette fonction f se stabilise bien.

③ on fait un résumé avec un tableau de variations

t	0		$+\infty$
$f(t)$	225	$\searrow$	25

et on reconnait avec la question posée l'application du corollaire du TVI.

La fonction f est continue et décroissante sur $[0;+\infty[$

on a : $f(0) = 225$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 25$

Le nombre 40 appartient bien à l'intervalle image $]25;225]$
et donc, d'après le corollaire du TVI,
l'équation $f(x) = 40$ possède une unique solution
sur l'intervalle $[0;+\infty[$

4) D'après le graphique, on a $T_0 \simeq 0{,}42\,h$

soit $T_0 \simeq 0{,}42 \times 60\,min \simeq 25\,min$

5) a) on a $D_0 = f\left(\frac{0}{60}\right) - f\left(\frac{1}{60}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{60}\right) \simeq 19$

$\to$ entre la sortie du four et après la première minute,
la température de la baguette a baissé de 19 °C.

b) on a $D_n = 200e^{-6\times\frac{n}{60}} + 25 - \left(200e^{-6\times\frac{n+1}{60}} + 25\right)$

$$= 200e^{-0{,}1n} - 200e^{-0{,}1n-0{,}1}$$

$$= 200e^{-0{,}1n}\left(1 - e^{-0{,}1}\right)$$

(D_n) est une suite à termes strictement positifs

et on a $\dfrac{D_{n+1}}{D_n} = \dfrac{200e^{-0{,}1(n+1)}\left(1-e^{-0{,}1}\right)}{200e^{-0{,}1n}\left(1-e^{-0{,}1}\right)} = e^{-0{,}1}$

soit $\dfrac{D_{n+1}}{D_n} < 1 \to (D_n)$ est décroissante

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-0{,}1n} = 0 \to \lim\limits_{n\to+\infty} D_n = 0$

Tout cela était prévisible ! La diminution de la
température baisse avec le temps, jusqu'à terme,
où la diminution sera (quasi) nulle.