Comment montrer qu'une fonction est convexe ou concave : la méthode

On va voir, sur cette fiche, la méthode la plus pratique et, donc, la plus facile à mettre en place.

Définition

En supposant que les fonctions concernées soient dérivables sans souci,
on appelle ***dérivée seconde*** d'une fonction f, et on la note f'', la dérivée de la fonction dérivée f'.
Cela signifie que l'on dérive deux fois la fonction f.
Ou que l'on dérive la fonction f pour obtenir f', et que l'on dérive ensuite f' pour obtenir f''.

Le théorème que l'on va utiliser

Pour une fonction supposée deux fois dérivable,
une fonction f est *convexe* sur un intervalle I si et seulement si la dérivée seconde f'' est positive sur I
et
une fonction f est *concave* sur un intervalle I si et seulement si la dérivée seconde f'' est négative sur I

La méthode avec un exemple

Pour savoir sur quel intervalle une fonction est *convexe* ou *concave* :
- on dérive deux fois la fonction f afin d'obtenir la ***dérivée seconde*** f''.
- on étudie le signe de cette fonction f'' et on fait son ***tableau de signes***.
- lorsque la dérivée seconde f'' est ***positive***, la fonction est ***convexe***.
- lorsque la dérivée seconde f'' est ***négative***, la fonction est ***concave***.

Exemple : on considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 12x + 12$
On va déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est *convexe* ou *concave*.

→ **étape 1** : on calcule la ***dérivée seconde*** f''

On a $f'(x) = 6x^2 - 24x + 12$

et $f''(x) = 12x - 24$

→ **étape 2** : on fait le ***tableau de signes*** de cette dérivée seconde f'' et on conclut que la fonction f est ***convexe*** lorsque f'' est ***positive*** ou que la fonction f est ***concave*** lorsque f'' est ***négative***.

on résout $12x - 24 = 0$ et on applique la règle des signes d'une fonction affine

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signes de f''		$-$	0	$+$	
fonction f		CONCAVE	|	CONVEXE	

c'est un point d'inflexion

→ **conclusion** : la fonction est ***concave*** sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$ et ***convexe*** sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.
Il y a donc un ***point d'inflexion*** au point d'abscisse 2 (et d'ordonnée $f(2) = 4$).

Il existe un théorème faisant le lien entre les variations de la dérivée f' et le fait que la fonction f soit concave ou convexe (si f' est croissante alors f est convexe, si f' est décroissante alors f est concave). Mais, dans la pratique, c'est bien le théorème énoncé au début de cette fiche que l'on utilise.