Comment montrer qu'une fonction est convexe ou concave : exemples (2)

L'énoncé de l'exercice

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

a) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

b) Calculer $f''(x)$ et déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est concave ou convexe.
En déduire les points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

Solution de cet exercice

a) on calcule la dérivée f' en appliquant la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

On a $f'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ → $f'(x)$ est du signe de $(x-1)$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$ 0 $+$	
$f(x)$	↘	||	↘ ↗	

← valeur interdite

b) on calcule la dérivée seconde f'' en partant de $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ *(soyez patient, elle est difficile)*

On a $f''(x) = \dfrac{(e^x(x-1) + e^x)x^2 - e^x(x-1) \times 2x}{x^4}$

→ $f''(x) = \dfrac{x^3 e^x - 2(x-1)xe^x}{x^4} = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$

Le trinôme $x^2 - 2x + 2$ est toujours positif, $f''(x)$ est du signe de x^3

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	||	$+$
$f(x)$	CONCAVE	||	CONVEXE

↑ valeur interdite

Et surtout, n'oubliez pas de visualiser tout cela à l'aide de votre calculatrice graphique !