Comment montrer qu'une fonction est convexe ou concave : exemples (1)

L'énoncé de l'exercice

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x^2 - 8x + 17)e^x$
a) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.
b) Calculer $f''(x)$ et déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est concave ou convexe.
En déduire les points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

Solution de cet exercice

a) on calcule la dérivée f' en appliquant la formule $(uv)' = u'v + uv'$

On a $f'(x) = (2x-8)e^x + (x^2-8x+17)e^x = (x^2-6x+9)e^x$
→ le discriminant de x^2-6x+9 est nulle
→ ce trinôme a donc une seule racine.

n'oublions pas que e^x est positif, pour tout x

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$		↗			

b) on calcule la dérivée seconde f'' en partant de $f'(x) = (x^2 - 6x + 9)e^x$

On a $f''(x) = (2x-6)e^x + (x^2-6x+9)e^x = (x^2-4x+3)e^x$
→ le discriminant de x^2-4x+3 est positif
→ ce trinôme a donc deux racines : 1 et 3.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		CONVEXE		CONCAVE		CONVEXE	

points d'inflexion

Et surtout, n'oubliez pas de visualiser tout cela à l'aide de votre calculatrice graphique !