Une application des combinaisons : les coefficients binomiaux

On a tous en tête l'identité remarquable, apprise au collège, permettant de développer $(a + b)^2$.
Mais, depuis, on n'a finalement pas tellement avancé dans les connaissances. Qui serait capable de développer $(a + b)^3$ ou $(a + b)^4$?
Le triangle de Pascal, avec ces différentes valeurs, va justement nous permettre d'avoir une méthode assez simple afin de développer ce type d'expressions.

Rappel du triangle de Pascal

$\binom{0}{0} = 1$					
$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$				
$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{2}{2} = 1$			
$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{3} = 1$		
$\binom{4}{0} = 1$	$\binom{4}{1} = 4$	$\binom{4}{2} = 6$	$\binom{4}{3} = 4$	$\binom{4}{4} = 1$	

Utilisation de ce triangle de Pascal pour développer

→ la troisième ligne de ce tableau (avec les nombres ***1 2 1***) va nous permettre de retrouver le résultat du développement de $(a + b)^2$.
Pour cela , la méthode consiste à prendre ces nombres ***1 2 1*** en les multipliant par les puissances décroissantes de a (de la puissance 2 à 0) et par les puissances croissantes de b (de la puissance 0 à 2).

|---------- *puissances décroissantes*

On obtiendra : $(a + b)^2 = \mathbf{1} \times a^2 \times b^0 + \mathbf{2} \times a^1 \times b^1 + \mathbf{1} \times a^0 \times b^2$.

|---------- *puissances croissantes*

On se souviendra alors des règles sur les puissances : $a^0 = b^0 = 1$; $a^1 = a$; $b^1 = b$.
On retrouve alors un résultat bien connu : $(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$
Les nombres ***1 2 1*** peuvent alors s'appeler des *coefficients binomiaux*.

La quatrième ligne du tableau (avec les nombres ***1 3 3 1***) va nous permettre de développer $(a + b)^3$.
Attention, les puissances de a vont aller, cette fois, de 3 à 0 et les puissances de b vont aller de 0 à 3.

|---------- *puissances décroissantes*

On obtiendra : $(a + b)^3 = \mathbf{1} \times a^3 \times b^0 + \mathbf{3} \times a^2 \times b^1 + \mathbf{3} \times a^1 \times b^2 + \mathbf{1} \times a^0 \times b^3$

|---------- *puissances croissantes*

On se souviendra, à nouveau, des règles sur les puissances : $a^0 = b^0 = 1$; $a^1 = a$; $b^1 = b$.
On obtient : $(a + b)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times b + 3 \times a \times b^2 + b^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$
Les nombres ***1 3 3 1*** s'appelleront, à nouveau, des coefficients binomiaux.

Une application : le développement de $(x + 1)^4$

En appliquant la même méthode pour la cinquième ligne du tableau , on obtiendrait :

|---------- *puissances décroissantes*

$(x + 1)^4 = \mathbf{1} \times x^4 \times 1^0 + \mathbf{4} \times x^3 \times 1^1 + \mathbf{6} \times x^2 \times 1^2 + \mathbf{4} \times x^1 \times 1^3 + \mathbf{1} \times x^0 \times 1^4$

|---------- *puissances croissantes*

Et puisque $x^0 = 1$ et $x^1 = x$, et que toutes les puissances de 1 sont égales à 1, on peut écrire :
$(x + 1)^4 = x^4 + 4 \times x^3 + 6 \times x^2 + 4 \times x + 1 = x^4 + 4\,x^3 + 6\,x^2 + 4\,x + 1$