Les propriétés de calculs avec les combinaisons

Rappel de la formule des combinaisons

Le nombre de *combinaisons* de p éléments parmi n éléments se note $\binom{n}{p}$ avec $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)! \times p!}$

Le triangle de Pascal

Cette organisation, proposée par le mathématicien Pascal, va nous permettre de bien visualiser les différentes propriétés des *combinaisons* (et les coefficients binomiaux de la fiche suivante).

$\binom{0}{0} = \mathbf{1}$					
$\binom{1}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{1}{1} = \mathbf{1}$				
$\binom{2}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{2}{1} = \mathbf{2}$	$\binom{2}{2} = \mathbf{1}$			
$\binom{3}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{3}{1} = \mathbf{3}$	$\binom{3}{2} = \mathbf{3}$	$\binom{3}{3} = \mathbf{1}$		
$\binom{4}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{4}{1} = \mathbf{4}$	$\binom{4}{2} = \mathbf{6}$	$\binom{4}{3} = \mathbf{4}$	$\binom{4}{4} = \mathbf{1}$	

Ce triangle se complète très facilement car en additionnant, sur une ligne, une case a et une case b ***consécutives***, on obtient le résultat de la case qui se trouvera sous la case b.
Par exemple, en prenant les ***cases grisées*** , on constate qu'en additionnant 3 et 1 , on obtient bien 4.

Avec les combinaisons, cela s'écrirait sous la forme : $\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \binom{4}{3}$.

On peut généraliser ce résultat par la formule générale : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Pour les plus volontaires d'entre vous, une démonstration de cette formule existe dans votre manuel.

Et la ligne suivante ?

N'hésitez pas à vérifier que vous obtenez cette nouvelle ligne du triangle de Pascal.

$\binom{5}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{5}{1} = \mathbf{5}$	$\binom{5}{2} = \mathbf{10}$	$\binom{5}{3} = \mathbf{10}$	$\binom{5}{4} = \mathbf{5}$	$\binom{5}{5} = \mathbf{1}$

Quelques propriétés à retenir

On constate, dans le triangle de Pascal, une "*symétrie*" des nombres sur chacune des lignes.

On constate, par exemple, que $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = \mathbf{1}$.

On peut généraliser et démontrer ce résultat par l'égalité suivante : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

On constate, par exemple, que $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = \mathbf{5}$.

On peut généraliser et démontrer ce résultat par l'égalité suivante : $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

On constate, par exemple, que $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$.

On peut généraliser et démontrer ce résultat par l'égalité suivante : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.