Les équations différentielles du type $y' = a\,y$
Méthode de résolution et exemples

Votre travail va consister ici à bien savoir reconnaitre et obtenir ce type d'*équations différentielles* , puis à bien apprendre par coeur la forme de leurs solutions.

Propriété

Les *équations différentielles* du type $y' = a\,y$ (où a est un nombre réel **non nul**) auront pour solutions des fonctions définies par $x \to k\,e^{a\,x}$ (avec k nombre réel)

Il faudra se rappeler que l'on obtient une infinité de solutions car le nombre k est un réel quelconque.
Seule la donnée d'une condition initiale permettra de fixer une valeur pour ce nombre k .

Des exemples de résolution

Si vous apprenez par coeur la propriété ci-dessus et que vous traitez les quelques exemples ci-dessous, vous n'aurez aucun souci pour savoir résoudre les *équations différentielles* du type $y' = a\,y$.

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle $y' = 4\,y$

On applique le cours avec $a = 4$

Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{4\,x}$

Exemple 2 : Résoudre l'équation différentielle $y' = -\,y$

On applique le cours avec $a = -\,1$

Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{-\,x}$

Exemple 3 : Résoudre l'équation différentielle $3\,y' + 5\,y = 0$

→ on transforme l'équation pour obtenir une équation du type $y' = a\,y$

On a $3\,y' + 5\,y = 0 \;\to\; 3\,y' = -\,5\,y \;\to\; y' = -\,\dfrac{5}{3}\,y$

Et on applique alors le cours avec $a = -\,\dfrac{5}{3}$

Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{-\,5x/3}$

Un exemple avec une condition initiale

Si on fixe une condition initiale (c'est à dire l'image d'un nombre par la *solution*) , alors il existe une unique solution à l'équation différentielle, car la valeur du nombre k est alors fixée.

Exemple : on cherche la solution de l'équation différentielle $2\,y' - 6\,y = 0$ telle que $f(1) = 2$

→ on transforme l'équation pour obtenir une équation du type $y' = a\,y$

On a $2\,y' - 6\,y = 0 \;\to\; 2\,y' = 6\,y \;\to\; y' = \dfrac{6}{2}\,y \;\to\; y' = 3\,y$

Et on applique alors le cours avec $a = 3$

Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{3\,x}$

→ on utilise la condition initiale en remplaçant x par 1 , le résultat devant être égal à 2.

On veut donc $k\,e^{3 \times 1} = 2 \;\to\; k\,e^{3} = 2 \;\to\; k = 2 / e^{3}$

La solution vérifiant $f(1) = 2$ est donc : $x \to (2 / e^{3})\,e^{3\,x}$