Les équations différentielles : définition , résolution d'une équation

Il faut savoir que le domaine des *équations différentielles* est très vaste et ces équations peuvent être parfois très compliquées. Le chapitre de Terminale va du coup rester une initiation pour laquelle il va surtout vous être demandé d'apprendre par coeur des résultats du cours.

La définition

On appellera *équation différentielle* toutes égalités mettant en jeu une fonction notée y et ses dérivées successives y' , y'' ..... On aura résolu une *équation différentielle* quand on aura trouvé l'ensemble des fonctions f vérifiant l'équation donnée.

Quelques exemples

$y' = 3\,y$	$y' = 3\,y + 5$	$y'' + 5\,y' + 2y = 0$	$y' = y - 2xe^x + 3e^x$

Les quatre égalités dans le tableau ci-dessus sont des *équations différentielles*.

Comment montrer qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

En classe de Terminale, afin de travailler avec des fonctions plus intéressantes à étudier (mais donc plus compliquées), il est fréquent que la question ne soit pas de "***trouver***" les solutions mais plus simplement de "***montrer que***" ou de "***vérifier que***" une fonction donnée soit bien une solution .

Méthode

Pour montrer ou vérifier qu'une fonction f est solution d'une *équation différentielle* , il suffit de calculer les dérivées successives de f (c'est à dire f', f'' ....) et de remplacer dans l'équation donnée afin de montrer que l'égalité est bien vérifiée.

Exemple 1 : montrer que la fonction f définie par $f(x) = \cos x$ est solution de l'*équation* $y'' + y = 0$

On a $f(x) = \cos x \quad \rightarrow \quad f'(x) = -\sin x \quad \rightarrow \quad f''(x) = -\cos x$
On obtient bien $f''(x) + f(x) = -\cos x + \cos x = 0$
Donc la fonction $x \rightarrow \cos x$ est bien solution de l'*équation différentielle* $y'' + y = 0$

Exemple 2 : montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^{-5x}$ est solution de $y'' + 4y' - 5y = 0$

On a $f(x) = e^{-5x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -5\,e^{-5x} \quad \rightarrow \quad f''(x) = 25\,e^{-5x}$
On obtient bien $f''(x) + 4f'(x) - 5f(x) = 25\,e^{-5x} + 4\times(-5\,e^{-5x}) - 5\,e^{-5x}$
$= 25\,e^{-5x} - 20\,e^{-5x} - 5\,e^{-5x} = 0$
Donc la fonction $x \rightarrow e^{-5x}$ est bien solution de l'*équation différentielle* $y'' + 4y' - 5y = 0$

Exemple 3 : montrer que f définie par $f(x) = (-x^2 + 3x - 1)\,e^x$ est solution de $y' = y - 2\,x\,e^x + 3e^x$

On calcule $f'(x)$ avec la formule $(uv)' = u'v + uv'$.
On obtient donc $f'(x) = (-2x + 3)\,e^x + (-x^2 + 3x - 1)\,e^x$
On factorise par e^x et on obtient $f'(x) = e^x(-x^2 + x + 2)$

On calcule aussi $f(x) - 2\,x\,e^x + 3e^x = (-x^2 + 3x - 1)\,e^x - 2\,x\,e^x + 3e^x$
On factorise par e^x et on obtient $e^x(-x^2 + 3x - 1 - 2\,x + 3) = e^x(-x^2 + x + 2)$

On a donc bien $f'(x) = f(x) - 2\,x\,e^x + 3e^x$
Donc la fonction $x \rightarrow (-x^2 + 3x - 1)\,e^x$ est bien solution de l'*équation* $y' = y - 2\,x\,e^x + 3e^x$

Les équations différentielles du type $y' = a\,y$
Méthode de résolution et exemples

Votre travail va consister ici à bien savoir reconnaitre et obtenir ce type d'*équations différentielles* , puis à bien apprendre par coeur la forme de leurs solutions.

Propriété

Les *équations différentielles* du type $y' = a\,y$ (où a est un nombre réel **non nul**) auront pour solutions des fonctions définies par $x \to k\,e^{a\,x}$ (avec k nombre réel)

Il faudra se rappeler que l'on obtient une infinité de solutions car le nombre k est un réel quelconque. Seule la donnée d'une condition initiale permettra de fixer une valeur pour ce nombre k .

Des exemples de résolution

Si vous apprenez par coeur la propriété ci-dessus et que vous traitez les quelques exemples ci-dessous, vous n'aurez aucun souci pour savoir résoudre les *équations différentielles* du type $y' = a\,y$.

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle $y' = 4\,y$

On applique le cours avec $a = 4$

Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{4\,x}$

Exemple 2 : Résoudre l'équation différentielle $y' = -\,y$

On applique le cours avec $a = -\,1$

Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{-x}$

Exemple 3 : Résoudre l'équation différentielle $3\,y' + 5\,y = 0$

→ ***on transforme l'équation pour obtenir une équation du type*** $y' = a\,y$

On a $3\,y' + 5\,y = 0 \;\to\; 3\,y' = -\,5\,y \;\to\; y' = -\,\frac{5}{3}\,y$

Et on applique alors le cours avec $a = -\,\frac{5}{3}$

Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{-5x/3}$

Un exemple avec une condition initiale

Si on fixe une condition initiale (c'est à dire l'image d'un nombre par la *solution*) , alors il existe une unique solution à l'équation différentielle, car la valeur du nombre k est alors fixée.

Exemple : on cherche la solution de l'équation différentielle $2\,y' - 6\,y = 0$ telle que $f(1) = 2$

→ ***on transforme l'équation pour obtenir une équation du type*** $y' = a\,y$

On a $2\,y' - 6\,y = 0 \;\to\; 2\,y' = 6\,y \;\to\; y' = \frac{6}{2}\,y \;\to\; y' = 3\,y$

Et on applique alors le cours avec $a = 3$

Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{3\,x}$

→ ***on utilise la condition initiale en remplaçant x par 1 , le résultat devant être égal à 2.***

On veut donc $k\,e^{3\times 1} = 2 \;\to\; k\,e^{3} = 2 \;\to\; k = 2 / e^{3}$

La solution vérifiant $f(1) = 2$ est donc : $x \to (2 / e^{3})\,e^{3\,x}$

Les équations différentielles du type $y' = a\,y + b$
Méthode de résolution et exemples

Votre travail va à nouveau consister à bien savoir reconnaitre et obtenir ce type d'*équations différentielles* , puis à bien apprendre par coeur la forme de leurs solutions.

Propriété

Les *équations différentielles* du type $y' = a\,y + b$ (où a est un nombre réel **non nul** et b un nombre réel quelconque) auront pour solutions des fonctions définies par $x \to k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$ (avec k nombre réel)

Il faudra se rappeler que l'on obtient une infinité de solutions car le nombre k est un réel quelconque. Seule la donnée d'une condition initiale permettra de fixer une valeur pour ce nombre k .

Des exemples de résolution

Si vous apprenez par coeur la propriété ci-dessus et que vous traitez les quelques exemples ci-dessous, vous n'aurez aucun souci pour savoir résoudre les équations différentielles du type $y' = a\,y + b$.

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle $y' = 2\,y + 10$

On applique le cours avec $a = 2$ et $b = 10$

Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{2x} - \frac{10}{2}$ soit $x \to k\,e^{2x} - 5$

Exemple 2 : Résoudre l'équation différentielle $y' = -3\,y + 5$

On applique le cours avec $a = -3$ et $b = 5$

Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{-3x} - \frac{5}{-3}$ soit $x \to k\,e^{-3x} + \frac{5}{3}$

Exemple 3 : Résoudre l'équation différentielle $4\,y' - 8\,y + 12 = 0$

→ on transforme l'équation pour obtenir une équation du type $y' = a\,y + b$

On a $4\,y' - 8\,y + 12 = 0 \to 4\,y' = 8\,y - 12 \to y' = \frac{8}{4}\,y - \frac{12}{4} \to y' = 2\,y - 3$

Et on applique alors le cours avec $a = 2$ et $b = -3$

Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{2x} - \frac{-3}{2}$ soit $x \to k\,e^{2x} + \frac{3}{2}$

Un exemple avec une condition initiale

Si on fixe une condition initiale (c'est à dire l'image d'un nombre par la *solution*) , alors il existe une unique solution à l'équation différentielle, car la valeur du nombre k est alors fixée.

Exemple : on cherche la solution de l'équation $2\,y' - 8\,y + 10 = 0$ avec $f(1) = 0$.

→ on transforme l'équation pour obtenir une équation du type $y' = a\,y + b$

On a $2\,y' - 8\,y + 10 = 0 \to 2\,y' = 8\,y - 10 \to y' = \frac{8}{2}\,y - \frac{10}{2} \to y' = 4\,y - 5$

Et on applique alors le cours avec $a = 4$ et $b = -5$

Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{4x} - \frac{-5}{4}$ soit $x \to k\,e^{4x} + \frac{5}{4}$

→ on utilise la condition initiale en remplaçant x par 1 , le résultat devant être égal à 0

On veut donc $k\,e^{4\times 1} + \frac{5}{4} = 0 \to k\,e^{4} = -\frac{5}{4} \to k = -\frac{5}{4}\,e^{-4}$

La solution vérifiant $f(1) = 0$ est donc : $x \to \left(-\frac{5}{4}\,e^{-4}\right) e^{4x} + \frac{5}{4}$

La condition initiale pour les solutions d'une équation différentielle

On a déjà croisé cette notion dans les fiches précedentes, et on va essayer de bien fixer les idées sur cette question de la "*condition initiale*". En effet, les méthodes apprises cette année nous permettent, à coup sûr, de donner l'ensemble des solutions d'une *équation différentielle*. Mais ces solutions seront définies à une constante k près. Or, très souvent, quand on travaille par exemple avec des phénomènes physiques, on aura besoin de définir LA FONCTION qui vérifie une *condition initiale*.
Par exemple, cela pourra être la vitesse initiale d'un objet (pour $t = 0$) , la pression atmosphérique pour une altitude de 0 *m* (égale à 1 013,25 *hectopascal*), la concentration initiale (pour $t = 0$) d'un composant dans une préparation chimique.
En tout cas, la condition initiale nous permettra de déterminer la valeur de la constante k .

La méthode

On considère que l'on a trouvé les solutions d'une équation différentielle.
Ces solutions sont exprimées avec une constante k .
On utilise alors la condition initiale pour remplacer la lettre x et obtenir le résultat correspondant.
Il nous reste à résoudre l'équation obtenue afin de déterminer la valeur de k .

Un exemple fondamental

Résoudre l'équation différentielle $y' = 2y$ et trouver l'unique solution vérifiant $f(0) = 3$
→ on commence par donner la solution générale de l'équation différentielle
On applique le cours avec $a = 2$
Les solutions s'écrivent donc $x \to k e^{2x}$
→ on utilise la condition initiale en remplaçant x par 0 , le résultat devant être égal à 3.
On veut donc $k e^{2 \times 0} = 3 \to k e^{0} = 3 \to k = 3$ (car $e^{0} = 1$)
Donc la solution vérifiant $f(0) = 3$ est : $x \to 3 e^{2x}$

Des exemples en Physique-Chimie

On considère la puissance (en watts) d'un son émis par une guitare à partir du moment où on a joué la note sur l'instrument. On admet que cette puissance est donnée par une fonction p du temps t (en *sec*), que sa valeur initiale (pour $t = 0$) est de 60 watts et qu'elle est solution de l'équation $y' = -0{,}12\,y$.
→ on commence par donner la solution générale de l'équation différentielle
On applique le cours avec $a = -0{,}12$
Les solutions s'écrivent donc $x \to k e^{-0{,}12\,t}$
→ on utilise la condition initiale en remplaçant t par 0 , le résultat devant être égal à 60.
On veut donc $k e^{-0{,}12 \times 0} = 60 \to k e^{0} = 60 \to k = 60$ (car $e^{0} = 1$)
Donc la solution vérifiant $p(0) = 60$ est : $t \to 60 e^{-0{,}12\,t}$

On considère la température d'un plat , sorti d'un four à 100 °C (pour $t = 0$). On s'intéresse au refroidissement de ce plat une fois sortie du four et on admet que sa température est donnée par une fonction g du temps t (en *min*) , et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' + 0{,}04\,y = 0{,}8$.
→ on commence par donner la solution générale de l'équation différentielle
On doit donc résoudre l'équation $y' + 0{,}04\,y = 0{,}8$ soit $y' = -0{,}04\,y + 0{,}8$
On applique le cours avec $a = -0{,}04$ et $b = 0{,}8$
Les solutions s'écrivent donc $t \to k e^{-0{,}04\,t} - \dfrac{0{,}8}{-0{,}04}$ soit $t \to k e^{-0{,}04\,t} + 20$
→ on utilise la condition initiale en remplaçant t par 0 , le résultat devant être égal à 100.
On veut donc $k e^{-0{,}04 \times 0} + 20 = 100 \to k e^{0} = 100 - 20 \to k = 80$ (car $e^{0} = 1$)
Donc la solution vérifiant $g(0) = 100$ est : $t \to 80 e^{-0{,}04\,t} + 20$

Les équations différentielles du type $y' = a\,y + f$, avec f une fonction

Il faudra bien faire la différence entre les deux types d'*équations différentielles* suivantes :

- les équations $y' = a\,y + b$ (où a et b sont des nombres réels) , pour lesquelles les solutions s'apprennent par coeur (c'est l'objet d'une fiche précedente de ce chapitre).
- les équations $y' = a\,y + f$ (où a est un nombre mais f est une fonction) pour lesquelles il faudra suivre une méthode spécifique que l'on va développer sur cette fiche.

Propriété

On considère une *équation différentielle* notée (E) : $y' = a\,y + f$ (avec f une fonction)
On va alors définir l'équation "*homogène*" (E_0) obtenue en "enlevant" f : $y' = a\,y$
Les solutions générales de l'équation (E) s'obtiennent en faisant la somme de :

- une **solution particulière** de l'équation (E)
- les **solutions générales** de l'équation "*homogène*" (E_0)

En pratique, en cette année de terminale, on ne vous demandera pas de ***trouver*** une solution particulière de (E_0), mais on vous demandera de ***vérifier*** qu'une fonction est une solution particulière de (E_0).
→ en résumé , on demande de "vérifier" plutôt que de "trouver".

Un exemple

On veut résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = y + x$

Etape 1 : on vérifie que la fonction $x \to -x - 1$ est bien une solution particulière de l'équation (E) .
On a $f(x) = -x - 1 \;\to\; f'(x) = -1$
On obtient donc $f(x) + x = -x - 1 + x = -1$ et on a donc bien $f'(x) = f(x) + x$
Etape 2 : on détermine les solutions générales de l'équation homogène (E_0)
On résout donc l'équation $y' = y$ et on reconnait le type d'équation $y' = a\,y$ d'une précédente fiche.
On applique le cours avec $a = 1$
Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{x}$
Etape 3 : d'après la propriété de cette fiche , la solution générale de (E) s'obtient par ***addition*** des fonctions obtenues dans les 2 étapes précédentes.
Les solutions générales de (E) sont donc : $x \to (-x - 1) + k\,e^{x}$

Un autre exemple

On veut résoudre l'équation différentielle (E) : $2\,y' + 6\,y = 6\,x^2 + 12\,x - 6$

Etape 1 : on vérifie que la fonction $x \to x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{13}{9}$ est bien solution particulière de l'équation (E) .
On a $f(x) = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{13}{9} \;\to\; f'(x) = 2x + \frac{4}{3}$
On obtient donc $2f'(x) + 6f(x) = 2\left(2x + \frac{4}{3}\right) + 6\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{13}{9}\right)$
$= 4x + \frac{8}{3} + 6x^2 + 8x - \frac{26}{3} = 6x^2 + 12x - 6$ *→ c'est bon !*
Etape 2 : on détermine les solutions générales de l'équation homogène (E_0)
On résout donc l'équation $2\,y' + 6\,y = 0$ soit $y' = -3\,y$
On applique le cours avec $a = -3$
Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{-3x}$
Etape 3 : D'après la propriété de cette fiche , la solution générale de (E) s'obtient par ***addition*** des fonctions obtenues dans les 2 étapes précédentes.
Les solutions générales de (E) sont donc : $x \to x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{13}{9} + k\,e^{-3x}$

Equations différentielles et modélisation en physique ou en chimie

Il y a beaucoup de situations en physique et en chimie qui vont amener à devoir résoudre une *équation différentielle*. On va juste voir sur cette fiche un exemple de chaque, et il est bien sûr impossible d'être exhaustif. Car, finalement, que serait ces domaines scientifiques sans les maths ??

Un exemple en physique

Un condensateur de capacité C est chargé avec une tension initiale de 20 volts. Il se décharge ensuite dans une résistance R. On admet alors que la tension U en volts, aux bormes du condensateur, varie en fonction du temps t et qu'elle est solution de l'*équation différentielle* $y' + \frac{1}{RC} y = 0$.

On veut résoudre cette *équation différentielle* (en tenant compte de la condition initiale) afin de trouver l'expression de la tension U en fonction du temps t.
On prendra ici une résistance $R = 1\,000$ et une capacité $C = 0{,}0001$.

→ on commence par donner la solution générale de l'équation différentielle

On a $\frac{1}{RC} = \frac{1}{1000 \times 0{,}0001} = \frac{1}{0{,}1} = 10$
On doit donc résoudre l'équation $y' + 10\,y = 0$ soit $y' = -10\,y$
On applique le cours avec $a = -10$
Les solutions s'écrivent donc $t \to k\,e^{-10\,t}$

→ on utilise la condition initiale en remplaçant t par 0 , le résultat devant être égal à 20.

On veut donc $k\,e^{-10 \times 0} = 20 \;\to\; k\,e^{0} = 20 \;\to\; k = 20$ (car $e^{0} = 1$)

Donc l'expression de la tension U en fonction du temps sera :
$$U(t) = 20\,e^{-10\,t}$$

On peut observer que la décharge est très rapide. Après 0,5 s, la tension sera égale à U (0,5) ≈0,13 volts

Un exemple en chimie

Pour avoir un carburant plus performant (l'iso-octane), on peut créer une réaction chimique en chauffant de l'octane (mélangé avec des solvants) dans un récipient.
On peut modéliser la concentration d'octane, en moles par litre, dans ce récipient et on admet qu'elle est solution de l'*équation différentielle* $y' + 0{,}12\,y = 0{,}003$.
On veut résoudre cette *équation différentielle* (en tenant compte du fait que la concentration initiale, pour $t = 0$, est égale à 0,5 mole par litre) afin de trouver l'expression de la concentration d'octane C en fonction du temps t (exprimé en *min*).

→ on commence par donner la solution générale de l'équation différentielle

On doit donc résoudre l'équation $y' + 0{,}12\,y = 0{,}003$ soit $y' = -0{,}12\,y + 0{,}003$
On applique le cours avec $a = -0{,}12$ et $b = 0{,}003$
Les solutions s'écrivent donc $t \to k\,e^{-0{,}12\,t} - \frac{0{,}003}{-0{,}12}$ soit $t \to k\,e^{-0{,}12\,t} + 0{,}025$

→ on utilise la condition initiale en remplaçant t par 0 , le résultat devant être égal à 0,5.

On veut donc $k\,e^{-0{,}12 \times 0} + 0{,}025 = 0{,}5 \;\to\; k\,e^{0} = 0{,}5 - 0{,}025 \;\to\; k = 0{,}475$ (car $e^{0} = 1$)

Donc l'expression de la concentration d'octane C en fonction du temps sera :
$$C(t) = 0{,}475\,e^{-0{,}12\,t} + 0{,}025$$

Après avoir chauffé pendant 5 minutes, la concentration d'octane est égale à C (5) ≈0,286 mole par litre.