Les équations différentielles du type $y' = a\,y + f$, avec f une fonction

Il faudra bien faire la différence entre les deux types d'*équations différentielles* suivantes :

- les équations $y' = a\,y + b$ (où a et b sont des nombres réels) , pour lesquelles les solutions s'apprennent par coeur (c'est l'objet d'une fiche précedente de ce chapitre).
- les équations $y' = a\,y + f$ (où a est un nombre mais f est une fonction) pour lesquelles il faudra suivre une méthode spécifique que l'on va développer sur cette fiche.

Propriété

On considère une *équation différentielle* notée (E) : $y' = a\,y + f$ (avec f une fonction)
On va alors définir l'équation "*homogène*" (E_0) obtenue en "enlevant" f : $y' = a\,y$
Les solutions générales de l'équation (E) s'obtiennent en faisant la somme de :

- une **solution particulière** de l'équation (E)
- les **solutions générales** de l'équation "*homogène*" (E_0)

En pratique, en cette année de terminale, on ne vous demandera pas de ***trouver*** une solution particulière de (E_0), mais on vous demandera de ***vérifier*** qu'une fonction est une solution particulière de (E_0).
→ en résumé , on demande de "vérifier" plutôt que de "trouver".

Un exemple

On veut résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = y + x$

Etape 1 : on vérifie que la fonction $x \to -x - 1$ est bien une solution particulière de l'équation (E) .
On a $f(x) = -x - 1 \;\to\; f'(x) = -1$
On obtient donc $f(x) + x = -x - 1 + x = -1$ et on a donc bien $f'(x) = f(x) + x$
Etape 2 : on détermine les solutions générales de l'équation homogène (E_0)
On résout donc l'équation $y' = y$ et on reconnait le type d'équation $y' = a\,y$ d'une précédente fiche.
On applique le cours avec $a = 1$
Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{x}$
Etape 3 : d'après la propriété de cette fiche , la solution générale de (E) s'obtient par ***addition*** des fonctions obtenues dans les 2 étapes précédentes.
Les solutions générales de (E) sont donc : $x \to (-x - 1) + k\,e^{x}$

Un autre exemple

On veut résoudre l'équation différentielle (E) : $2y' + 6y = 6x^2 + 12x - 6$

Etape 1 : on vérifie que la fonction $x \to x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{13}{9}$ est bien solution particulière de l'équation (E) .
On a $f(x) = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{13}{9} \;\to\; f'(x) = 2x + \frac{4}{3}$
On obtient donc $2f'(x) + 6f(x) = 2\left(2x + \frac{4}{3}\right) + 6\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{13}{9}\right)$
$= 4x + \frac{8}{3} + 6x^2 + 8x - \frac{26}{3} = 6x^2 + 12x - 6$ *→ c'est bon !*
Etape 2 : on détermine les solutions générales de l'équation homogène (E_0)
On résout donc l'équation $2y' + 6y = 0$ soit $y' = -3y$
On applique le cours avec $a = -3$
Les solutions s'écrivent donc $x \to k\,e^{-3x}$
Etape 3 : D'après la propriété de cette fiche , la solution générale de (E) s'obtient par ***addition*** des fonctions obtenues dans les 2 étapes précédentes.
Les solutions générales de (E) sont donc : $x \to x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{13}{9} + k\,e^{-3x}$