Les équations différentielles : définition , résolution d'une équation

Il faut savoir que le domaine des *équations différentielles* est très vaste et ces équations peuvent être parfois très compliquées. Le chapitre de Terminale va du coup rester une initiation pour laquelle il va surtout vous être demandé d'apprendre par coeur des résultats du cours.

La définition

On appellera *équation différentielle* toutes égalités mettant en jeu une fonction notée y et ses dérivées successives y' , y'' ...... On aura résolu une *équation différentielle* quand on aura trouvé l'ensemble des fonctions f vérifiant l'équation donnée.

Quelques exemples

$y' = 3\,y$	$y' = 3\,y + 5$	$y'' + 5\,y' + 2y = 0$	$y' = y - 2xe^{x} + 3e^{x}$

Les quatre égalités dans le tableau ci-dessus sont des *équations différentielles*.

Comment montrer qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

En classe de Terminale, afin de travailler avec des fonctions plus intéressantes à étudier (mais donc plus compliquées), il est fréquent que la question ne soit pas de "***trouver***" les solutions mais plus simplement de "***montrer que***" ou de "***vérifier que***" une fonction donnée soit bien une solution .

Méthode

Pour montrer ou vérifier qu'une fonction f est solution d'une *équation différentielle* ,
il suffit de calculer les dérivées successives de f (c'est à dire f', f'' ....) et de remplacer dans l'équation donnée afin de montrer que l'égalité est bien vérifiée.

Exemple 1 : montrer que la fonction f définie par $f\,(x) = \cos x$ est solution de l'*équation* $y'' + y = 0$

On a $f(x) = \cos x \;\to\; f'(x) = -\sin x \;\to\; f''(x) = -\cos x$
On obtient bien $f''(x) + f(x) = -\cos x + \cos x = 0$
Donc la fonction $\boldsymbol{x \to \cos x}$ est bien solution de l'*équation différentielle* $y'' + y = 0$

Exemple 2 : montrer que la fonction f définie par $f\,(x) = e^{-5x}$ est solution de $y'' + 4y' - 5y = 0$

On a $f(x) = e^{-5x} \;\to\; f'(x) = -5\,e^{-5x} \;\to\; f''(x) = 25\,e^{-5x}$
On obtient bien $f''(x) + 4f'(x) - 5f(x) = 25\,e^{-5x} + 4\times(-5\,e^{-5x}) - 5\,e^{-5x}$
$= 25\,e^{-5x} - 20\,e^{-5x} - 5\,e^{-5x} = 0$
Donc la fonction $\boldsymbol{x \to e^{-5x}}$ est bien solution de l'*équation différentielle* $y'' + 4y' - 5y = 0$

Exemple 3 : montrer que f définie par $f(x) = (-x^2 + 3x - 1)\,e^{x}$ est solution de $y' = y - 2\,x\,e^{x} + 3e^{x}$

On calcule $f'(x)$ avec la formule $(uv)' = u'v + uv'$.
On obtient donc $f'(x) = (-2x + 3)\,e^{x} + (-x^2 + 3x - 1)\,e^{x}$
On factorise par e^{x} et on obtient $f'(x) = e^{x}(-x^2 + x + 2)$

On calcule aussi $f(x) - 2\,x\,e^{x} + 3e^{x} = (-x^2 + 3x - 1)\,e^{x} - 2\,x\,e^{x} + 3e^{x}$
On factorise par e^{x} et on obtient $e^{x}(-x^2 + 3x - 1 - 2x + 3) = e^{x}(-x^2 + x + 2)$

On a donc bien $f'(x) = f(x) - 2\,x\,e^{x} + 3e^{x}$
Donc la fonction $\boldsymbol{x \to}\,(-x^2 + 3x - 1)\,e^{x}$ est bien solution de l'*équation* $y' = y - 2\,x\,e^{x} + 3e^{x}$