Les ensembles en mathématiques : inclusion , réunion et intersection

Pour bien comprendre et illustrer les définitions et les formules de cette fiche, on va utiliser les ensembles de nombres suivants :

- l'ensemble A constitué des nombres suivants { 2 ; 3 ; 4 }
- l'ensemble B constitué des nombres suivants { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}
- l'ensemble G constitué des nombres suivants { 4 ; 5 ; 6 ; 7 }

Inclusion de deux ensembles

Définition : on dit qu'un ensemble F ***est inclus dans*** un autre ensemble H si TOUS les éléments de l'ensemble F se retouvent aussi dans l'ensemble H.
On le note alors : $F \subset H$, et on dit alors "F inclus dans H".

Exemples avec les ensembles définis au début de la fiche :
- on a $A \subset B$ car tous les éléments de l'ensemble A sont bien aussi dans l'ensemble B.
- on a $A \not\subset G$ car il y a au moins un élément de l'ensemble A qui n'est pas dans l"ensemble G (par exemple, le nombre 2).

La réunion (ou l'union) de deux ensembles

Définition : la ***réunion*** de deux ensembles F et H est un ensemble qui regroupe tous les éléments qui se trouvent soit dans l'ensemble F, soit dans l'ensemble H (ce sont les éléments qui sont ***dans F ou dans H***).
On le note $F \cup H$, et on dit alors "F union H".

Exemple avec les ensembles définis au début de la fiche :
- on a $B \cup G = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \}$

L'intersection de deux ensembles

Définition : l'***intersection*** de deux ensembles F et H est un ensemble qui regroupe tous les éléments qui se trouvent ***dans l'ensemble F et dans l'ensemble H*** .
On le note $F \cap H$, et on dit alors "F inter H"

Exemple avec les ensembles définis au début de la fiche :
- on a $B \cap G = \{ 4 ; 5 \}$

La formule reliant la réunion (l'union) et l'intersection

Pour deux ensembles F et H , on pourrait écrire la formule suivante : $F \cup H = F + H - F \cap H$

Exemple : avec les ensembles définis au début de la fiche , on pourrait illustrer cette propriété en écrivant que $B \cup G = B + G - B \cap G$.
Cela correspond à écrire que $\{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\} + \{ 4 ; 5 ; 6 ; 7 \} - \{ 4 ; 5 \}$
→ *en fait, on "enlève" l'intersection afin de ne pas la compter deux fois (et donc une fois en trop)* !

Si on s'intéresse au ***cardinal*** d'un ensemble , c'est à dire ***au nombre d'élément*** d'un ensemble , on retrouve une formule similaire : **card (B ∪ G) = card (B) + card (G) - card (B ∩ G)**.
→ *on vérifie que l'on bien ici card (B ∪ G) = 7 , card (B) = 5 , card (G) = 4 et card (B ∩ G) = 2.*

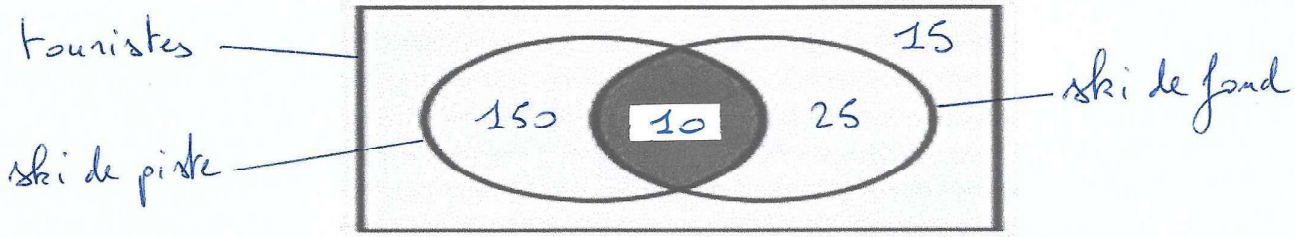
Et quand on s'intéressera aux probabilités , on aura à nouveau le même type de formule , si on considère deux événements notés B et G : on aura **P (B ∪ G) = P (B) + P (G) - P (B ∩ G)**.

Construire et utiliser un diagramme pour trouver des ensembles

Un premier exemple utilisant un diagramme

On demande à 200 touristes leurs activités après des vacances à la montagne.
160 touristes déclarent avoir fait du ski de piste , 35 déclarent avoir fait du ski de fond et 10 déclarent avoir pratiqué les deux disciplines.
Combien de touristes sont allés à la montagne sans pratiquer ni le ski de piste , ni le ski de fond ?

→ on réalise le diagramme suivant en commençant par placer les 10 qui pratiquent le ski de piste et le ski de fond. Et on complète avec les 150 qui ne pratiquent que le ski de piste.
Cela nous donne bien le total pour le ski de piste : 150 + 10 = 160.



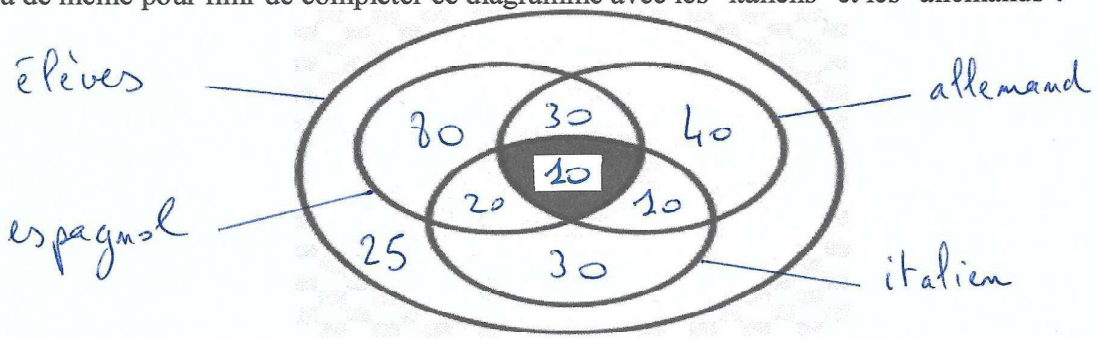
→ **on peut alors conclure qu'il y a 15 touristes qui n'ont pratiqué aucune des deux disciplines.**
En ajoutant tous les ensembles du diagramme, on obtient bien 150 + 10 + 25 + 15 = 200.

Remarque *→ on aurait pu aussi utiliser ici un raisonnement calculatoire.*
Pour cela, on rappelle que le ***cardinal*** *d'un ensemble est égal au* ***nombre d'éléments*** *de cet ensemble.*
Si on note P l'ensemble des touristes ayant fait du ski de piste et F l'ensemble des touristes ayant fait du ski de fond, on rappelle que l'on a la formule : ***card (P ∪ F) = card (P) + card (F) - card (P ∩ F)****.*
Donc, le nombre de touristes ayant pratiqué l'un ou l'autre ***(P ∪ F)*** *est égal à 160 + 35 – 10 soit 185.*
Et cela signifie qu'il y a bien 15 touristes (200 – 185) qui ont pratiqué ni l'un ni l'autre .

Un deuxième exemple utilisant un diagramme

Parmi les 245 élèves d'un établissement , 70 étudient l'italien , 140 étudient l'espagnol et 90 étudient l'allemand. De plus , on sait que 40 étudient l'espagnol et l'allemand , 30 étudient l'italien et l'espagnol , 20 étudient l'italien et l'allemand , et il y a 10 élèves qui étudient les trois langues.
Combien d'élèves de cet établissement étudient aucune des trois langues ?

→ on réalise le diagramme suivant en commençant par placer les 10 qui étudient les trois langues.
On continue en plaçant les 30 qui étudient l'espagnol et l'allemand , et les 20 qui étudient l'espagnol et l'italien (on enlève à chaque fois les 10 qui sont déjà comptés dans ceux qui étudient les trois langues).
Et on complète avec les 80 qui ne pratiquent que l'espagnol.
Cela nous donne bien le total pour l'espagnol : 80 + 30 + 20 + 10 = 140.
On fera de même pour finir de compléter ce diagramme avec les "italiens" et les "allemands".



→ **on peut alors conclure qu'il y a 25 élèves qui n'ont étudié aucune des trois langues.**
En ajoutant tous les ensembles du diagramme, on obtient bien 80+30+10+20+30+40+10+25=245.

Le dénombrement : les trois situations possibles à connaitre

Vous allez voir cette année trois formules qui permettront de ***dénombrer*** trois situations types qu'il faudra savoir reconnaitre. Mais, attention, cela ne veut pas dire, qu'à chaque fois, il faudra utiliser une de ces formules pour faire un dénombrement. Ce sont des situations types à maitriser mais, parfois, les calculs seront très intuitifs et sans formule type.

On va ici imaginer que l'on met 10 jetons numérotés de 0 jusqu'à 9 dans une urne.
On va tirer de cette urne 4 jetons de trois façons différentes,
et on va dénombrer, dans chaque cas, combien de tirages à 4 chiffres on pourra obtenir .

La première situation : les p-uplets

On fait un tirage, ***avec remise***, de 4 jetons et on note le nombre obtenu.
Cela signifie que l'***on tient compte de l'ordre*** des chiffres tirés et qu'il y a une ***répétition possible*** de ces chiffres (on tire chaque jeton l'un après l'autre et on remet le jeton à chaque fois).
→ les tirages ***1 4 1 3*** et ***3 1 1 4*** sont donc des tirages possibles.

On obtient ici un ***4-uplets d'un ensemble de 10 éléments***. On dénombrera alors **10^4 possibilités**.

On peut le comprendre intuitivement car il y a 10 possibilités pour le premier jeton, et, à nouveau, 10 possibilités pour le deuxième jeton ..... Ce qui fera $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ possibilités.

La deuxième situation : les p-uplets d'éléments distincts (ou arrangements)

On fait un tirage, ***sans remise***, de 4 jetons et on note le nombre obtenu.
Cela signifie que l'***on tient toujours compte de l'ordre*** des chiffres mais qu'***il n'y a plus de répétition*** possible des chiffres (on tire chaque jeton l'un après l'autre mais on ne remet pas le jeton tiré).
→ les tirages ***1 4 1 3*** et ***3 1 1 4*** ne sont donc plus possibles (car le 1 ne peut apparaitre deux fois).
→ par contre, les tirages ***1 4 8 3*** et ***3 8 1 4*** sont des tirages possibles.

On obtient ici un ***4-uplets d'éléments distincts d'un ensemble de 10 éléments***.
On pourra également parler d'un ***arrangement de 4 éléments parmi 10*** .

Le nombre de possibilités sera alors égal à : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.

On peut le comprendre intuitivement car il y a 10 possibilités pour le premier jeton , mais il n'y en a plus que 9 pour le deuxième jeton, puis 8 pour le troisième jeton et , enfin , 7 pour le dernier jeton.

La troisième situation : les combinaisons

On tire cette fois les 4 jetons ***simultanément***.
Il n'y a donc toujours ***pas de répétitions*** possibles et ***on ne doit plus tenir compte de l'ordre*** des chiffres car le tirage est simultané, et on se retrouve avec les 4 jetons "dans la main" sans notion d'ordre.
→ les tirages ***1 4 8 3*** et ***3 8 1 4*** correspondent donc au même tirage (ce qui nous intéresse, c'est par exemple d'avoir tiré le 4 sans se soucier s'il a été tiré en deuxième ou en quatrième position) .

On obtient ici une ***combinaison de 4 éléments parmi 10 éléments*** (on dit aussi "***4 parmi 10***").
On pourra le noter $\binom{10}{4}$. Le résultat est égal à $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5040}{24} = 210$

Un petit résumé

p-uplets = ordre important ET répétition possible des éléments
p-uplets d'éléments distincts (ou *arrangement*) = ordre important MAIS pas de répétition possible
combinaison = ni ordre important , ni répétition possible

On verra, dans les fiches suivantes, les formules généralisées de chaque situation
avec toutes les explications nécessaires !!

Comment savoir dénombrer des *p-uplets*

Qu'est ce qu'un *p-uplets* ?

Un *p-uplets* d'un ensemble à *n* éléments est une partie de cet ensemble constituée de *p* éléments (pris parmi les *n* éléments de cet ensemble).
On parlera de *p-uplets* quand les deux règles suivantes seront respectées :

- il peut y avoir ***répétitions*** des éléments
- il faut tenir compte de ***l'ordre*** entre les différents éléments

Attention , le nombre n peut être plus grand , plus petit ou égal au nombre p (voir la situation 2).

Exemple : avec un ensemble constitué de 10 chiffres { 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 }.
Si on s'intéresse aux "*nombres à 4 chiffres*" qu'il est possible d'écrire, alors on va réaliser des *4-uplets* (car il y a une ***répétition*** possible des chiffres, et l'***ordre*** des chiffres est important).
On aura, par exemple, comme possibilités, les nombres 2 3 7 2 et 3 2 2 7 .

La propriété

Le nombre de *p-uplets* d'un ensemble à *n* éléments est égal à n^p .

Exemple : en reprenant l'ensemble constitué de 10 chiffres {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}.
Le nombre total de "*nombres à 4 chiffres*", soit de *4-uplets*, sera égal à 10^4 (c'est à dire 10 000).

On peut le comprendre intuitivement car on a 10 possibilités pour le premier chiffre , puis 10 possibilités pour le deuxième chiffre ...etc....

Applications

On va maintenant voir quelques situations qui doivent nous permettre de reconnaitre des *p-uplets*.

Situation 1 : on lance 5 fois une pièce de 1 euro pour jouer à pile ou face.
Quel est le nombre de résultats possibles ?

On doit comprendre qu'il y a une ***répétition*** possible de chaque résultats (on peut obtenir plusieurs fois le résultat "pile") et qu'il faut tenir compte de l'***ordre*** de sortie des éléments.
Pour l'ensemble des cinq lancers, on peut, par exemple, obtenir : P P P F F ou P F F P P .
On reconnait alors des *5-uplets* d'un ensemble à *2* éléments.
Le nombre de résultats possibles est alors égal à : $2^5 = 32$.

On peut le comprendre intuitivement car on a 2 possibilités pour le premier lancer , puis 2 possibilités pour le deuxième lancer ..etc...

Situation 2 : on considère un QCM (Questionnaire à Choix Multiples)
pour lequel il y a 3 réponses possibles, et une seule de ces réponses est correcte.
Quel est le nombre total de façons de répondre à ce QCM s'il y a 12 questions ?

On doit comprendre qu'il y a une ***répétition*** possible de chaque résultats (on peut avoir la première réponse correcte pour plusieurs questions) et qu'il faut tenir compte de l'***ordre*** des réponses aux questions.
En numérotant "de 1 à 3" les réponses correctes, on pourra avoir la série: 1 1 2 1 3 3 2 2 3 1 2 1
On reconnait alors des *12-uplets* d'un ensemble à *3* éléments.
Le nombre de résultats possibles est alors égal à : $3^{12} = 531\,441$.

On peut le comprendre intuitivement car on a 3 possibilités de réponses pour la première question , puis 3 possibilités pour la deuxième questtion ..etc...

Et quel est le nombre total de façons de répondre à ce QCM s'il y a 2 questions ?
La réponse devient $3^2 = 9$.

Comment dénombrer des arrangements (*p-uplets* d'éléments distincts)

On commence par définir "*factorielle n*"

Le nombre "*factorielle n*" se note $n!$ et il est égal à $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1$
On a, par exemple, $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ et on aura par convention $0! = 1$.
On pourra remarquer que $(n+1)! = (n+1) \times [\, n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1 \,] = (n+1) \times n!$

Qu'est ce qu'un *p-uplets* d'éléments distincts ou *arrangement* ?

Ce terme *arrangement* n'est parfois pas utilisé par les professeurs en Terminale et, pourtant, c'est celui que vous allez trouver, par exemple, sur votre calculatrice TI-83 premium.

On a défini les *p-uplets* sur la fiche précédente et un *arrangement* va correspondre à un *p-uplet* constitué d'éléments distincts (c'est à dire différents).
Donc il faudra toujours tenir compte de l'ordre des éléments MAIS il n'y a plus de répétitions possibles.

Exemple : avec un ensemble constitué de 10 chiffres { 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 }.
Si on s'intéresse aux "*nombres à 4 chiffres*" qu'il est possible d'écrire, ***sans répéter les chiffres***, alors on va réaliser des *4-uplets* d'éléments distincts, c'est à dire un *arrrangement*.
Le nombre 2 3 7 2 n'est plus possible car le chiffre 2 serait répété deux fois.
On aura, par exemple, comme possibilités, les nombres 2 3 7 5 et 3 5 2 7 .

La propriété

Le nombre de *p-uplets* d'éléments distincts d'un ensemble à *n* éléments est égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Exemple : en reprenant l'ensemble constitué de 10 chiffres {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}.
Le nombre total de "*nombres à 4 chiffres*" qu'il est possible d'écrire, ***sans répéter les chiffres***, c'est à dire de *4-uplets* d'éléments distincts sera égal à $\dfrac{10!}{(10-4)!} = \dfrac{10!}{6!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$.
Après simplification, cela nous donne : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

On peut le comprendre intuitivement car on a 10 possibilités pour le premier chiffre, puis 9 possibilités pour le deuxième chiffre car on ne peut répéter le premier, puis 8 possibilités pour le troisième chiffre et, enfin, 7 possibilités pour le dernier chiffre.

Applications

Situation 1 : un très bon exemple est fourni par les courses de chevaux, c'est à dire le Tiercé.
Le but est de trouver, pour une course, les trois premiers chevaux dans l'ordre.

L'ordre est donc important (un cheval qui arrive premier , ce n'est pas pareil que s'il arrive troisième).
Mais il n'y a pas de répétitions possibles, car un même cheval ne peut pas arriver premier et troisième.
Si on considère 20 chevaux au départ, on aura donc un *arrangement* de 3 chevaux parmi 20 (c'est à dire un *3-uplets* d'éléments distincts parmi 20 éléments).

Le nombre total de podium (ou tiercé) possibles est égal à $\dfrac{20!}{(20-3)!} = \dfrac{20!}{17!}$.

On obtient alors $20 \times 19 \times 18 = 6\,840$ possibilités de podium pour ce Tiercé.

Situation 2 : on cherche le nombre d'anagrammes du mot MATH.

L'ordre des lettres va, bien sûr, être important mais il n'y aura pas de répétitions possibles des lettres.
On aura donc ici un arrangement de 4 lettres parmi les 4 mêmes lettres.
Ce cas particulier s'appelle une permutation d'un ensemble à 4 éléments.

Le nombre total d'anagrammes possibles est égal à $\dfrac{4!}{(4-4)!} = \dfrac{4!}{0!}$ *(on rappelle que 0! = 1)*

On obtient alors $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagrammes possibles pour le mot MATH.

Comment dénombrer des combinaisons de *p* éléments parmi *n*

On commence par définir "*factorielle n*"

Le nombre "*factorielle n*" se note $n!$ et il est égal à $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ....\times 2 \times 1$
On a, par exemple, $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ et on aura par convention $0! = 1$.
On pourra remarquer que $(n+1)! = (n+1) \times [n \times (n-1) \times (n-2) \times ....\times 2 \times 1] = (n+1) \times n!$

Qu'est ce qu'une combinaison ?

Ce terme *combinaison* est celui que vous trouverez, par exemple, sur votre calculatrice TI-83 premium.

On parlera d'une *combinaison* de *p* éléments parmi *n* ou, plus simplement, on dira "*p parmi n*".
On sera alors dans un cas où il n'y a pas de répétitions possibles des éléments ET aussi où l'ordre des éléments choisis n'a aucune importance.

Exemple : avec une urne constituée de 10 boules numérotées de 0 jusqu'à 9 .
Si on s'intéresse à un ***tirage simultané*** de 4 boules parmi ces 10 boules, on comprend bien que la notion d'ordre n'existe pas ici. En effet, si on tire la boule 6 avec ce *tirage simultané*, cela n'a aucun sens de dire qu'elle a été tirée en première ou en deuxième position.

La propriété

Le nombre de combinaisons de *p* éléments parmi *n* éléments se note $\binom{n}{p}$ avec $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)! \times p!}$

Exemple : en reprenant l'urne constituée de 10 boules numérotées de 0 jusqu'à 9 , et le *tirage simultané* de 4 boules parmi ces 10 boules. Le nombre de combinaison est égal à $\binom{10}{4} = \dfrac{10!}{(10-4)! \times 4!} = 210$

N'hésitez pas à taper directement ce calcul sur votre calculatrice ou utiliser la touche "combinaison".

Applications

Situation 1 : au poker, chaque joueur reçoit une "*main*" de 5 cartes prises parmi 52 cartes. On cherche alors le nombre total de "*mains*" possibles.

C'est une combinaison de 5 cartes parmi 52.
C'est comme un tirage simultané de 5 cartes , pour lequel il n'y a ni répétition ni ordre.
Le nombre de combinaisons est alors égal à $\binom{52}{5} = \dfrac{52!}{(52-5)! \times 5!} = 2\,598\,960$.

Situation 2 : un capitaine de tennis dispose de 6 joueurs et il doit choisir 2 joueurs pour former une équipe de double. On cherche alors le nombre total d'équipes de double possibles.

C'est une combinaison de 2 joueurs parmi 6.
C'est comme un tirage simultané de 2 joueurs , pour lequel il n'y a ni répétition ni ordre.
Le nombre de combinaisons est alors égal à $\binom{6}{2} = \dfrac{6!}{(6-2)! \times 2!} = 15$.

Situation 3 : au LOTO© , le joueur coche des numéros sur une grille et attend le tirage . L'ancienne règle consistait à tirer 6 boules dans une urne de 49 boules numérotées de 1 à 49.

Le nombre de tirages était alors une combinaison de 6 boules parmi 49.
On avait $\binom{49}{6} = \dfrac{49!}{(49-6)! \times 6!} = 13\,983\,816$ tirages possibles .

Avec la nouvelle règle, on tire 5 boules parmi les 49 (soit $\binom{49}{5} = 1\,906\,884$) puis on tire 1 boule dans une urne avec 10 boules numérotées de 1 à 10 (cela multiplie donc par 10 le nombre de tirages).
On obtient donc $1\,906\,884 \times 10 = 19\,068\,840$ tirages possibles.
Conclusion : la probabilité de gagner a donc diminué (mais les gains ont heureusement augmenté ...)

Les propriétés de calculs avec les combinaisons

Rappel de la formule des combinaisons

Le nombre de *combinaisons* de p éléments parmi n éléments se note $\binom{n}{p}$ avec $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)! \times p!}$

Le triangle de Pascal

Cette organisation, proposée par le mathématicien Pascal, va nous permettre de bien visualiser les différentes propriétés des *combinaisons* (et les coefficients binomiaux de la fiche suivante).

$\binom{0}{0} = \mathbf{1}$					
$\binom{1}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{1}{1} = \mathbf{1}$				
$\binom{2}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{2}{1} = \mathbf{2}$	$\binom{2}{2} = \mathbf{1}$			
$\binom{3}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{3}{1} = \mathbf{3}$	$\binom{3}{2} = \mathbf{3}$	$\binom{3}{3} = \mathbf{1}$		
$\binom{4}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{4}{1} = \mathbf{4}$	$\binom{4}{2} = \mathbf{6}$	$\binom{4}{3} = \mathbf{4}$	$\binom{4}{4} = \mathbf{1}$	

Ce triangle se complète très facilement car en additionnant, sur une ligne, une case a et une case b ***consécutives***, on obtient le résultat de la case qui se trouvera sous la case b.
Par exemple, en prenant les ***cases grisées*** , on constate qu'en additionnant 3 et 1 , on obtient bien 4.

Avec les combinaisons, cela s'écrirait sous la forme : $\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \binom{4}{3}$.

On peut généraliser ce résultat par la formule générale : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Pour les plus volontaires d'entre vous, une démonstration de cette formule existe dans votre manuel.

Et la ligne suivante ?

N'hésitez pas à vérifier que vous obtenez cette nouvelle ligne du triangle de Pascal.

$\binom{5}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{5}{1} = \mathbf{5}$	$\binom{5}{2} = \mathbf{10}$	$\binom{5}{3} = \mathbf{10}$	$\binom{5}{4} = \mathbf{5}$	$\binom{5}{5} = \mathbf{1}$

Quelques propriétés à retenir

On constate, dans le triangle de Pascal, une "*symétrie*" des nombres sur chacune des lignes.

On constate, par exemple, que $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = \mathbf{1}$.

On peut généraliser et démontrer ce résultat par l'égalité suivante : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

On constate, par exemple, que $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = \mathbf{5}$.

On peut généraliser et démontrer ce résultat par l'égalité suivante : $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

On constate, par exemple, que $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$.

On peut généraliser et démontrer ce résultat par l'égalité suivante : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Une application des combinaisons : les coefficients binomiaux

On a tous en tête l'identité remarquable, apprise au collège, permettant de développer $(a + b)^2$.
Mais, depuis, on n'a finalement pas tellement avancé dans les connaissances. Qui serait capable de développer $(a + b)^3$ ou $(a + b)^4$?
Le triangle de Pascal, avec ces différentes valeurs, va justement nous permettre d'avoir une méthode assez simple afin de développer ce type d'expressions.

Rappel du triangle de Pascal

$\binom{0}{0} = \mathbf{1}$					
$\binom{1}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{1}{1} = \mathbf{1}$				
$\binom{2}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{2}{1} = \mathbf{2}$	$\binom{2}{2} = \mathbf{1}$			
$\binom{3}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{3}{1} = \mathbf{3}$	$\binom{3}{2} = \mathbf{3}$	$\binom{3}{3} = \mathbf{1}$		
$\binom{4}{0} = \mathbf{1}$	$\binom{4}{1} = \mathbf{4}$	$\binom{4}{2} = \mathbf{6}$	$\binom{4}{3} = \mathbf{4}$	$\binom{4}{4} = \mathbf{1}$	

Utilisation de ce triangle de Pascal pour développer

→ la troisième ligne de ce tableau (avec les nombres ***1 2 1***) va nous permettre de retrouver le résultat du développement de $(a + b)^2$.
Pour cela , la méthode consiste à prendre ces nombres ***1 2 1*** en les multipliant par les puissances décroissantes de a (de la puissance 2 à 0) et par les puissances croissantes de b (de la puissance 0 à 2).

|---------- *puissances décroissantes*

On obtiendra : $(a + b)^2 = \mathbf{1} \times a^2 \times b^0 + \mathbf{2} \times a^1 \times b^1 + \mathbf{1} \times a^0 \times b^2$.

|---------- *puissances croissantes*

On se souviendra alors des règles sur les puissances : $a^0 = b^0 = 1$; $a^1 = a$; $b^1 = b$.
On retrouve alors un résultat bien connu : $(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$
Les nombres ***1 2 1*** peuvent alors s'appeler des *coefficients binomiaux*.

La quatrième ligne du tableau (avec les nombres ***1 3 3 1***) va nous permettre de développer $(a + b)^3$.
Attention, les puissances de a vont aller, cette fois, de 3 à 0 et les puissances de b vont aller de 0 à 3.

|---------- *puissances décroissantes*

On obtiendra : $(a + b)^3 = \mathbf{1} \times a^3 \times b^0 + \mathbf{3} \times a^2 \times b^1 + \mathbf{3} \times a^1 \times b^2 + \mathbf{1} \times a^0 \times b^3$

|---------- *puissances croissantes*

On se souviendra, à nouveau, des règles sur les puissances : $a^0 = b^0 = 1$; $a^1 = a$; $b^1 = b$.
On obtient : $(a + b)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times b + 3 \times a \times b^2 + b^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$
Les nombres ***1 3 3 1*** s'appelleront, à nouveau, des coefficients binomiaux.

Une application : le développement de $(x + 1)^4$

En appliquant la même méthode pour la cinquième ligne du tableau , on obtiendrait :

|---------- *puissances décroissantes*

$(x + 1)^4 = \mathbf{1} \times x^4 \times 1^0 + \mathbf{4} \times x^3 \times 1^1 + \mathbf{6} \times x^2 \times 1^2 + \mathbf{4} \times x^1 \times 1^3 + \mathbf{1} \times x^0 \times 1^4$

|---------- *puissances croissantes*

Et puisque $x^0 = 1$ et $x^1 = x$, et que toutes les puissances de 1 sont égales à 1, on peut écrire :
$\mathbf{(x + 1)^4 = x^4 + 4 \times x^3 + 6 \times x^2 + 4 \times x + 1 = x^4 + 4\,x^3 + 6\,x^2 + 4\,x + 1}$

Des exemples d'exercices avec différents cas de dénombrements

Ces exemples doivent vous servir à acquérir une ***expérience*** vis à vis de différentes situations.
Et aussi, à comprendre que, parfois votre intuition et votre bon sens feront un meilleur travail que la recherche systématique de la "bonne formule".

Situation 1
En utilisant les lettres du mot MATHS, et en acceptant les répétitions, on souhaite écrire des mots de trois lettres (qu'ils aient un sens ou non). Combien de mots peut-on alors former ?

Puisque les répétitions sont possibles, on a 5 possibilités pour choisir la première lettre, et à nouveau 5 possibilités pour la deuxième lettre, et enfin 5 possibilités pour la troisième lettre.
Cela donne un nombre de mots possibles égal à 5^3 soit 125 mots .
*On aurait pu reconnaitre un **3-uplets d'un ensemble à 5 éléments** car on tient compte de l'ordre et il y a des répétitions possibles.*

Situation 2
Pour un dessert, une famille de cinq a une boite de huit gateaux disponibles. Sachant que chacun ne prendra qu'un seul gateau, combien y a t'il de distributions possibles ?

Le premier qui se sert aura 8 choix possibles, mais le deuxième n'aura plus que 7 choix ... etc ...
Le nombre de distributions possibles est donc égal à $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ soit 6 720 distributions.
*On aurait pu reconnaitre un **arrangement** (ou **5-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 8 éléments**)*
avec la formule $\frac{8!}{(8-5)!}$ *soit* $\frac{8!}{3!}$ *= 6 720 distributions.*

Situation 3
Cette même famille de cinq a cette fois une boite de cinq gateaux. Sachant que chacun ne prendra à nouveau qu'un seul gateau, combien y a t'il de distributions possibles ?

Le premier qui se sert aura 5 choix possibles , mais le deuxième n'aura plus que 4 choix ... etc ... jusqu'au cinquième et dernier membre de la famille qui n'aura plus qu'un seul choix.
Le nombre de distributions possibles est donc égal à $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ soit 120 distributions.
*On aurait pu reconnaitre une **permutation** (ou **5-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 5 éléments**)*
avec la formule $\frac{5!}{(5-5)!}$ *soit* $\frac{5!}{0!}$ *= 5! = 120 distributions.*

Situation 4
Pour jouer au poker, on distribue cinq cartes dans un jeu de 52 cartes.
Combien y a t'il de "mains" possibles de cinq cartes ?

Il n'y a ici ni ordre ni répétition possible. C'est donc une ***combinaison*** de 5 éléments parmi 52.
On calcule $\binom{52}{5} = \frac{52!}{(52-5)! \times 5!}$ = 2 598 960 mains.

Situation 5
Toujours au poker, quel est le nombre de "mains" possibles avec un carré (par exemple, les quatre valets) ?

Pour répondre à cette question, il existe des raisonnements très "mathématiques" utilisant les combinaisons. Mais on va plutôt utiliser un raisonnement très concret et plus intuitif.
En effet, il y a 13 carrés possibles (carré d'As, carré de Roi .....) et cela fixe déjà 4 cartes sur les 5.
Il reste juste à associer ces carrés avec une cinquième carte qui ne peut être choisie que parmi les 48 cartes restantes (les 52 du paquet initial – les 4 cartes du carré).
On obtient alors $13 \times 48 = 624$ mains avec un carré.