La condition initiale pour les solutions d'une équation différentielle

On a déjà croisé cette notion dans les fiches précedentes, et on va essayer de bien fixer les idées sur cette question de la "*condition initiale*". En effet, les méthodes apprises cette année nous permettent, à coup sûr, de donner l'ensemble des solutions d'une *équation différentielle*. Mais ces solutions seront définies à une constante k près. Or, très souvent, quand on travaille par exemple avec des phénomènes physiques, on aura besoin de définir LA FONCTION qui vérifie une *condition initiale*.
Par exemple, cela pourra être la vitesse initiale d'un objet (pour $t = 0$) , la pression atmosphérique pour une altitude de 0 *m* (égale à 1 013,25 *hectopascal*), la concentration initiale (pour $t = 0$) d'un composant dans une préparation chimique.
En tout cas, la condition initiale nous permettra de déterminer la valeur de la constante k .

La méthode

On considère que l'on a trouvé les solutions d'une équation différentielle.
Ces solutions sont exprimées avec une constante k .
On utilise alors la condition initiale pour remplacer la lettre x et obtenir le résultat correspondant.
Il nous reste à résoudre l'équation obtenue afin de déterminer la valeur de k .

Un exemple fondamental

Résoudre l'équation différentielle $y' = 2y$ et trouver l'unique solution vérifiant $f(0) = 3$
→ on commence par donner la solution générale de l'équation différentielle
On applique le cours avec $a = 2$
Les solutions s'écrivent donc $x \to k e^{2x}$
→ on utilise la condition initiale en remplaçant x par 0 , le résultat devant être égal à 3.
On veut donc $k e^{2 \times 0} = 3 \to k e^{0} = 3 \to k = 3$ (car $e^{0} = 1$)
Donc la solution vérifiant $f(0) = 3$ est : $x \to 3 e^{2x}$

Des exemples en Physique-Chimie

On considère la puissance (en watts) d'un son émis par une guitare à partir du moment où on a joué la note sur l'instrument. On admet que cette puissance est donnée par une fonction p du temps t (en *sec*), que sa valeur initiale (pour $t = 0$) est de 60 watts et qu'elle est solution de l'équation $y' = -0{,}12\,y$.
→ on commence par donner la solution générale de l'équation différentielle
On applique le cours avec $a = -0{,}12$
Les solutions s'écrivent donc $x \to k e^{-0{,}12\,t}$
→ on utilise la condition initiale en remplaçant t par 0 , le résultat devant être égal à 60.
On veut donc $k e^{-0{,}12 \times 0} = 60 \to k e^{0} = 60 \to k = 60$ (car $e^{0} = 1$)
Donc la solution vérifiant $p(0) = 60$ est : $t \to 60 e^{-0{,}12\,t}$

On considère la température d'un plat , sorti d'un four à 100 °C (pour $t = 0$). On s'intéresse au refroidissement de ce plat une fois sortie du four et on admet que sa température est donnée par une fonction g du temps t (en *min*) , et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' + 0{,}04\,y = 0{,}8$.
→ on commence par donner la solution générale de l'équation différentielle
On doit donc résoudre l'équation $y' + 0{,}04\,y = 0{,}8$ soit $y' = -0{,}04\,y + 0{,}8$
On applique le cours avec $a = -0{,}04$ et $b = 0{,}8$
Les solutions s'écrivent donc $t \to k e^{-0{,}04\,t} - \dfrac{0{,}8}{-0{,}04}$ soit $t \to k e^{-0{,}04\,t} + 20$
→ on utilise la condition initiale en remplaçant t par 0 , le résultat devant être égal à 100.
On veut donc $k e^{-0{,}04 \times 0} + 20 = 100 \to k e^{0} = 100 - 20 \to k = 80$ (car $e^{0} = 1$)
Donc la solution vérifiant $g(0) = 100$ est : $t \to 80 e^{-0{,}04\,t} + 20$