Equations différentielles et modélisation en physique ou en chimie

Il y a beaucoup de situations en physique et en chimie qui vont amener à devoir résoudre une *équation différentielle*. On va juste voir sur cette fiche un exemple de chaque, et il est bien sûr impossible d'être exhaustif. Car, finalement, que serait ces domaines scientifiques sans les maths ??

Un exemple en physique

Un condensateur de capacité C est chargé avec une tension initiale de 20 volts. Il se décharge ensuite dans une résistance R. On admet alors que la tension U en volts, aux bormes du condensateur, varie en fonction du temps t et qu'elle est solution de l'*équation différentielle* $y' + \frac{1}{RC} y = 0$.

On veut résoudre cette *équation différentielle* (en tenant compte de la condition initiale) afin de trouver l'expression de la tension U en fonction du temps t.
On prendra ici une résistance $R = 1\,000$ et une capacité $C = 0{,}0001$.

→ on commence par donner la solution générale de l'équation différentielle

On a $\frac{1}{RC} = \frac{1}{1000 \times 0{,}0001} = \frac{1}{0{,}1} = 10$
On doit donc résoudre l'équation $y' + 10\,y = 0$ soit $y' = -10\,y$
On applique le cours avec $a = -10$
Les solutions s'écrivent donc $t \to k\,e^{-10\,t}$

→ on utilise la condition initiale en remplaçant t par 0 , le résultat devant être égal à 20.

On veut donc $k\,e^{-10 \times 0} = 20 \;\to\; k\,e^{0} = 20 \;\to\; k = 20$ (car $e^{0} = 1$)

Donc l'expression de la tension U en fonction du temps sera :
$U(t) = 20\,e^{-10\,t}$

On peut observer que la décharge est très rapide. Après 0,5 s, la tension sera égale à U (0,5) ≈0,13 volts

Un exemple en chimie

Pour avoir un carburant plus performant (l'iso-octane), on peut créer une réaction chimique en chauffant de l'octane (mélangé avec des solvants) dans un récipient.
On peut modéliser la concentration d'octane, en moles par litre, dans ce récipient et on admet qu'elle est solution de l'*équation différentielle* $y' + 0{,}12\,y = 0{,}003$.
On veut résoudre cette *équation différentielle* (en tenant compte du fait que la concentration initiale, pour $t = 0$, est égale à 0,5 mole par litre) afin de trouver l'expression de la concentration d'octane C en fonction du temps t (exprimé en *min*).

→ on commence par donner la solution générale de l'équation différentielle

On doit donc résoudre l'équation $y' + 0{,}12\,y = 0{,}003$ soit $y' = -0{,}12\,y + 0{,}003$
On applique le cours avec $a = -0{,}12$ et $b = 0{,}003$
Les solutions s'écrivent donc $t \to k\,e^{-0{,}12\,t} - \frac{0{,}003}{-0{,}12}$ soit $t \to k\,e^{-0{,}12\,t} + 0{,}025$

→ on utilise la condition initiale en remplaçant t par 0 , le résultat devant être égal à 0,5.

On veut donc $k\,e^{-0{,}12 \times 0} + 0{,}025 = 0{,}5 \;\to\; k\,e^{0} = 0{,}5 - 0{,}025 \;\to\; k = 0{,}475$ (car $e^{0} = 1$)

Donc l'expression de la concentration d'octane C en fonction du temps sera :
$C(t) = 0{,}475\,e^{-0{,}12\,t} + 0{,}025$

Après avoir chauffé pendant 5 minutes, la concentration d'octane est égale à C (5) ≈0,286 mole par litre.