Comment dénombrer des arrangements (*p-uplets* d'éléments distincts)

On commence par définir "*factorielle n*"

Le nombre "*factorielle n*" se note $n!$ et il est égal à $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1$
On a, par exemple, $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ et on aura par convention $0! = 1$.
On pourra remarquer que $(n+1)! = (n+1) \times [\, n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1 \,] = (n+1) \times n!$

Qu'est ce qu'un *p-uplets* d'éléments distincts ou *arrangement* ?

Ce terme *arrangement* n'est parfois pas utilisé par les professeurs en Terminale et, pourtant, c'est celui que vous allez trouver, par exemple, sur votre calculatrice TI-83 premium.

On a défini les *p-uplets* sur la fiche précédente et un *arrangement* va correspondre à un *p-uplet* constitué d'éléments distincts (c'est à dire différents).
Donc il faudra toujours tenir compte de l'ordre des éléments MAIS il n'y a plus de répétitions possibles.

Exemple : avec un ensemble constitué de 10 chiffres { 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 }.
Si on s'intéresse aux "*nombres à 4 chiffres*" qu'il est possible d'écrire, ***sans répéter les chiffres***, alors on va réaliser des *4-uplets* d'éléments distincts, c'est à dire un *arrrangement*.
Le nombre 2 3 7 2 n'est plus possible car le chiffre 2 serait répété deux fois.
On aura, par exemple, comme possibilités, les nombres 2 3 7 5 et 3 5 2 7 .

La propriété

Le nombre de *p-uplets* d'éléments distincts d'un ensemble à *n* éléments est égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Exemple : en reprenant l'ensemble constitué de 10 chiffres {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}.
Le nombre total de "*nombres à 4 chiffres*" qu'il est possible d'écrire, ***sans répéter les chiffres***, c'est à dire de *4-uplets* d'éléments distincts sera égal à $\dfrac{10!}{(10-4)!} = \dfrac{10!}{6!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$.
Après simplification, cela nous donne : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

On peut le comprendre intuitivement car on a 10 possibilités pour le premier chiffre, puis 9 possibilités pour le deuxième chiffre car on ne peut répéter le premier, puis 8 possibilités pour le troisième chiffre et, enfin, 7 possibilités pour le dernier chiffre.

Applications

Situation 1 : un très bon exemple est fourni par les courses de chevaux, c'est à dire le Tiercé.
Le but est de trouver, pour une course, les trois premiers chevaux dans l'ordre.

L'ordre est donc important (un cheval qui arrive premier , ce n'est pas pareil que s'il arrive troisième).
Mais il n'y a pas de répétitions possibles, car un même cheval ne peut pas arriver premier et troisième.
Si on considère 20 chevaux au départ, on aura donc un *arrangement* de 3 chevaux parmi 20 (c'est à dire un *3-uplets* d'éléments distincts parmi 20 éléments).

Le nombre total de podium (ou tiercé) possibles est égal à $\dfrac{20!}{(20-3)!} = \dfrac{20!}{17!}$.

On obtient alors $20 \times 19 \times 18 = 6\,840$ possibilités de podium pour ce Tiercé.

Situation 2 : on cherche le nombre d'anagrammes du mot MATH.

L'ordre des lettres va, bien sûr, être important mais il n'y aura pas de répétitions possibles des lettres.
On aura donc ici un arrangement de 4 lettres parmi les 4 mêmes lettres.
Ce cas particulier s'appelle une permutation d'un ensemble à 4 éléments.

Le nombre total d'anagrammes possibles est égal à $\dfrac{4!}{(4-4)!} = \dfrac{4!}{0!}$ *(on rappelle que 0! = 1)*

On obtient alors $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagrammes possibles pour le mot MATH.