Diviseur , multiple , divisible par ....

Le vocabulaire va être très important dans tout ce chapitre, afin de ne pas tout confondre !
De plus, vous pouvez tout de suite intégrer que, dans ce chapitre, nous ne travaillerons qu'avec des nombres entiers. Pas de nombres décimaux, pas de nombres négatifs dans tout le chapitre.

Qu'est ce qu'un diviseur ? Qu'est ce qu'un multiple ?

Un nombre entier *d* est un ***diviseur*** d'un nombre entier *A* si le résultat de la division de *A* par *d* est égal à un résultat entier.

Conséquence : Les nombres *d* et *A* sont alors dans une même table de multiplication.

On dit alors que le nombre A ***est divisible par*** le nombre d.

Si le nombre entier *d* est un *diviseur* du nombre entier *A*, alors on peut dire aussi que le nombre A est un ***multiple*** du nombre *d*.

Conséquence : Le nombre *A* peut s'obtenir en multipliant le nombre *d* par un nombre entier. On est toujours bien dans une même table de multiplication.

Exemples :

a) 3 est un diviseur de 15 car on a 15 : 3 = 5
Donc on peut dire que 15 est divisible par 3
et que 15 est un multiple de 3.

b) 4 n'est pas un diviseur de 15 car 15 : 4 = 3,75.

Comment trouver des diviseurs

Deux règles essentielles sur les diviseurs pour commencer
Le nombre 1 est un diviseur de tous les nombres entiers.
Tout nombre entier est un diviseur de lui-même.

Donc, pour trouver les diviseurs d'un nombre entier, on sait qu'il y en aura toujours deux (le nombre 1 et le nombre lui-même), puis il faudra juste se souvenir des tables de multiplications !

Les diviseurs de 10 sont : 1 ; 2 ; 5 ; 10
Les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12
Les diviseurs de 11 sont : 1 ; 11

Comment trouver des multiples

C'est très simple. Il suffit de prendre le nombre, et de le multiplier par des nombres entiers.

Des multiples de 10 sont : 10 ; 20 ; 30 ; 40 ...
Des multiples de 12 sont : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ...
Des multiples de 11 sont : 11 ; 22 ; 33 ; 44 ...

Les critères de divisibilité

Je pense qu'il faut, au moins, maitriser les quatre critères de divisibilité suivant : la divisibilité par 2 , par 5 , par 3 et par 9. Car, même si les calculatrices existent et qu'il est bien de les utiliser, il est toujours important d'avoir une base de calcul mental.

Mais, au fait, qu'est ce qu'un critère de divisibilité ? C 'est une règle simple qui va vous permettre, en observant un nombre, de savoir directement, si ce nombre est divisible par 2 , ou par 3 ou par ...

La divisibilité par 2

Un nombre entier est *divisible par* 2 si il est PAIR , c'est à dire si il SE TERMINE par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

576 est divisible par 2 car il se termine par 6.

847 n'est pas divisible par 2 car il se termine par 7.

La divisibilité par 5

Un nombre entier est *divisible par* 5 si il SE TERMINE par 0 ou par 5.

435 est divisible par 5 car il se termine par 5.

502 n'est pas divisible par 5 car il se termine par 2.

La divisibilité par 3

Attention, il serait inutile, et même faux, de ne regarder que le dernier chiffre cette fois.

La règle est plus technique : il faut faire la SOMME de tous les chiffres du nombre étudié et on vérifie si le résultat de cette SOMME est dans la table de 3.

354 est divisible par 3 car $3+5+4=12$. table de 3

713 n'est pas divisible par 3 car $7+1+3=11$. n'est pas dans la table de 3

La divisibilité par 9

La règle ressemble énormément à la règle de la divisibilité par 3 : il faut faire la SOMME de tous les chiffres du nombre étudié et on vérifie si le résultat de cette SOMME est dans la table de 9.

738 est divisible par 9 car $7+3+8=18$. table de 9

219 n'est pas divisible par 9 car $2+1+9=12$. n'est pas dans la table de 9

Application "amusante"

Sachant que 123 est divisible par 3,
tous les nombres suivants sont divisibles par 3 :

213 ⟶ somme égale à 6.

1302 ⟶ somme égale à 6 aussi !

10320 ⟶ somme égale à 6 encore !

300 201 ⟶ somme égale à 6 enfin !

Les nombres premiers
Décomposition d'un nombre avec ces nombres premiers : la méthode

Les nombres premiers jouent un rôle essentiel en mathématiques et il faut, dès maintenant, connaitre par cœur le début de la liste de ces nombres premiers (il y en a une infinité) et savoir bien les utiliser .

La définition

Un *nombre premier* est un nombre entier positif qui n'admet que deux diviseurs distincts (ce qui signifie "différent l'un de l'autre") : ***1 et lui-même***.

En clair, un *nombre premier* n'est divisible que par 1 (qui est un diviseur de tous les nombres !) et par lui même (sachant que tout nombre est divisible par lui même !). Il ne sera donc divisible par aucun autre nombre, et il ne sera donc dans aucune autre table de multiplication.

Attention, cette définition exclut le nombre 1 qui n'est effectivement pas un nombre premier.

Exemple : 11 est un *nombre premier* car il n'est divisible que par 1 et par 11.
12 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 1 , par 12 mais aussi par 2 ; par 3 ..

Le début de la liste des nombres premiers.

Il y a beaucoup de méthode pour faire la liste des nombres premiers. Mais je pense que vous pouvez assez facilement apprendre et retrouver (à l'aide des tables de multiplications) le début de cette liste qui est à parfaitement mémoriser.

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 : 23 ; 29

La décomposition d'un nombre en facteurs premiers : la méthode

On va suivre ici une méthode qui va nous permettre de décomposer n'importe quel nombre entier à l'aide des nombres premiers. C'est un peu comme si on défaisez une maison en LEGO (*c'est le nombre*) pour retrouver toutes les petites pièces qui ont aidé à la construire (*ce sont les nombres premiers*).

Il y a ***trois règles essentielles*** à respecter pour décomposer un nombre entier :

- il faut essayer de diviser ce nombre par les nombres premiers ***pris dans l'ordre*** de la liste. On commence avec 2 ; puis on essaye avec 3 ; puis on essaye avec 5 ...
- tant que "***c'est bon***" (tant que le résultat de la division est un entier) alors on continue avec ce nombre premier avant de passer au nombre premier suivant.
- on s'arrête quand on arrive à 1 comme résultat final de la division.

Décomposition du nombre 1274

On part de 1274 et on teste avec 2	→ 1274 : 2 = 637	→ *c'est bon* (résultat entier)
On part de 637 et on teste *encore* avec 2	→ 637 : 2 = 318,5	→ *pas bon* (résultat non entier)
On repart de 637 et on teste avec 3	→ 637 : 3 = 212,33..	→ *pas bon* (résultat non entier)
On repart de 637 et on teste avec 5	→ 637 : 5 = 127,4	→ *pas bon* (résultat non entier)
On repart de 637 et on teste avec 7	→ 637 : 7 = 91	→ *c'est bon* (résultat entier)
On part de 91 et on teste *encore* avec 7	→ 93 : 7 = 13	→ *c'est bon* (résultat entier)
On finit avec 13 (qui est premier)	→ 13 : 13 = 1	→ on s'arrête !!

On écrira alors cette décomposition de la façon suivante :

$$\begin{array}{r|l} 1274 & 2 \\ 637 & 7 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

On peut vérifier que
$2 \times 7 \times 7 \times 13 = 1274$

Comment trouver la liste des diviseurs premiers d'un nombre entier : quelques exemples

On va voir, dans ces exemples, que même en partant de nombres entiers très grands, la méthode utilisée va très vite, car elle utilise des divisions et permet *rapidement* de travailler avec des nombres plus petits.

Décomposition du nombre 924

924	2	on a 924 : 2 = 462
462	2	on a 462 : 2 = 231
231	3	231 n'est pas divisible par 2, mais on a 231 : 3 = 77
77	7	77 n'est divisible ni par 3, ni par 5, mais on a 77 : 7 = 11
11	11	on reconnait un nombre premier donc on divise par lui-même.
1		

Décomposition du nombre 2205

2205	3	2205 n'est pas divisible par 2, mais on a 2205 : 3 = 735
735	3	on a 735 : 3 = 245
245	5	245 n'est pas divisible par 3, mais on a 245 : 5 = 49
49	7	49 n'est pas divisible par 5, mais on a 49 : 7 = 7
7	7	on reconnait un nombre premier donc on divise par lui-même.
1		

Décomposition du nombre 21528

21 528	2	on a 21 528 : 2 = 10 764
10 764	2	on a 10 764 : 2 = 5 382
5 382	2	on a 5 382 : 2 = 2691
2691	3	2691 n'est pas divisible par 2, mais on a 2691 : 3 = 897
897	3	on a 897 : 3 = 299
299	13	299 n'est divisible ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11 mais 299 : 13 = 23
23	23	on reconnait un nombre premier donc on divise par lui même
1		

Comment trouver TOUS les diviseurs d'un nombre entier

Il faut prendre ici un peu de recul sur les nombres rencontrés dans ce chapitre d'arithmétique.
→ Si le nombre est assez petit, on n'a pas besoin de méthode particulière pour donner l'ensemble de TOUS ses diviseurs. Par exemple, les diviseurs de 18 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18.
On se souviendra que le nombre 1 est un diviseur de tous les nombres entiers, que tous les nombres sont des diviseurs pour eux mêmes , et que vous connaissez un peu vos tables de multiplications.
→ Si le nombre est par contre très grand, toute méthode, et donc même celle vue sur cette fiche, sera contraignante à mettre en place devant le nombre important de diviseurs à traiter et à trouver.
Du coup, la méthode vue sur cette fiche sera très utile pour des nombres "ni trop grand, ni trop petit".

La méthode
On va avoir besoin de faire la décomposition du nombre entier à l'aide des nombres premiers.
Une fois cette liste établie, il faudra ***avec soin*** faire des combinaisons avec ces diviseurs afin de reconstituer l'ensemble de TOUS les diviseurs.

Exemple : on cherche l'ensemble de tous les diviseurs du nombre 60.
→ on décompose 60 à l'aide des nombres premiers.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

→ on fait des combinaisons en multipliant ces facteurs premiers entre eux.
On commence en les prenant tout seul ; puis en les multipliant ensemble par deux ; puis par trois .....

Les diviseurs de 60 sont : 1
2
3
5
2×2 $(= 4)$
2×3 $(= 6)$
2×5 $(= 10)$
3×5 $(= 15)$
$2 \times 2 \times 3$ $(= 12)$
$2 \times 2 \times 5$ $(= 20)$
$2 \times 3 \times 5$ $(= 30)$
$2 \times 2 \times 3 \times 5$ $(= 60)$

La liste complète est donc :
1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60

(on vérifie cette liste en associant les diviseurs entre eux)

Comment simplifier une fraction : les fractions irréductibles

Comme dans tout ce chapitre, la nécessité d'utiliser une méthode va dépendre de la capacité de chacun à faire du calcul mental, à trouver des diviseurs, à maitriser les tables de multiplications.....

Par exemple, si il faut simplifier la fraction $\frac{8}{10}$, il est inutile de mettre en place une méthode "*compliquée*" pour dire que cette fraction est simplifiable par 2, et que l'on obtient $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

Un peu de vocabulaire pour commencer

Une fraction est *irréductible* quand on ne peut plus la simplifier.
Le numérateur et le dénominateur n'ont plus aucun diviseur en commun (à part le nombre 1, bien sûr).
On dit alors que le numérateur et le dénominateur sont *premiers entre eux*.

Par exemple, la fraction $\frac{7}{11}$ est irréductible car les nombres 7 et 11 sont *premiers entre eux*, ils n'ont que 1 comme diviseur commun.

Ce vocabulaire n'est pas si facile : les nombres 18 et 35 ne sont pas premiers (18 est divisible par 2 ... et 35 est divisible par 5 ...) mais ils sont premiers entre eux (ils n'ont que 1 comme diviseur commun).

La méthode

On cherche à simplifier la fraction $\frac{1764}{2268}$ pour la rendre irréductible.

→ on décompose 1764 et 2268 à l'aide des nombres premiers.

1764	2
882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

2268	2
1134	2
567	3
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

→ on reconstitue les nombres 1764 et 2268, puis la fraction à l'aide de ces décompositions. Et enfin, on simplifie entre eux tous les diviseurs premiers qui se trouvent au numérateur ET au dénominateur.

$$\frac{1764}{2268} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{7} \times 7}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times 3 \times \cancel{7}} = \frac{7}{3 \times 3} = \frac{7}{9}$$

Comment simplifier une fraction : des exemples

Vous allez avoir sur cette fiche des exemples qui vont vous permettre de vous entrainer à *savoir décomposer* un nombre entier avec des nombres premiers et à utiliser ces décompositions pour *rendre irréductible* des fractions.

Exemple 1 : On cherche à simplifier la fraction $\dfrac{168}{252}$ pour la rendre irréductible.

→ on décompose 168 et 252 à l'aide des nombres premiers.

On obtient :

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

→ on finit en simplifiant la fraction.

$$\frac{168}{252} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{7}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{7}} = \frac{2}{3}$$

Exemple 2 : On cherche à simplifier la fraction $\dfrac{3825}{1530}$ pour la rendre irréductible.

→ on décompose 3825 et 1530 à l'aide des nombres premiers.

On obtient :

$$\begin{array}{r|l} 3825 & 3 \\ 1275 & 3 \\ 425 & 5 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1530 & 2 \\ 765 & 3 \\ 255 & 3 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

→ on finit en simplifiant la fraction.

$$\frac{3825}{1530} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 5 \times \cancel{17}}{2 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times \cancel{17}} = \frac{5}{2}$$

Des cas particuliers avec les simplifications de fractions

Quand on nous demande de simplifier une fraction pour la rendre irréductible, il arrive parfois que l'on tombe sur un des *cas particuliers* suivants. Il faut juste les avoir déjà croisés une fois, afin de ne pas être surpris par les conclusions obtenues.

Exemple 1 : On cherche à simplifier la fraction $\frac{225}{675}$ pour la rendre irréductible.

→ on décompose 225 et 675 à l'aide des nombres premiers.

On obtient :

$$\begin{array}{r|l} 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

→ on finit en simplifiant la fraction.

$$\frac{225}{675} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times \cancel{5}}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{5} \times \cancel{5}} = \frac{1}{3}$$

on écrit 1 si on a "tout barré"

Exemple 2 : On cherche à simplifier la fraction $\frac{196}{495}$ pour la rendre irréductible.

→ on décompose 196 et 495 à l'aide des nombres premiers.

On obtient :

$$\begin{array}{r|l} 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

→ on finit en simplifiant la fraction.

$$\frac{196}{495} = \frac{2 \times 2 \times 7 \times 7}{3 \times 3 \times 5 \times 11} = \frac{196}{495}$$

on ne peut rien simplifier

La fraction était déjà irréductible.

Les nombres 196 et 495 sont premiers entre eux.

Le Plus Grand Diviseur Commun
Comment calculer le PGCD de deux nombres

Principe de départ

Quand on s'intéresse aux décompositions en facteurs premiers de ***deux nombres entiers***, il y a schématiquement deux possibilités :

- soit le *seul diviseur commun* (qui se retrouve dans chacune des listes) est le nombre 1 (qui sera toujours un diviseur bien sûr !). Dans ce cas, ***le PGCD de ces deux nombres est égal à 1*** car ces nombres n'ont aucun autre diviseur commun, à part ce nombre 1. Les deux nombres sont alors ***premier entre eux.***

  PGCD = 1 *est équivalent à* "les deux nombres sont premiers entre eux"

- soit il y a des diviseurs qui se retrouvent dans les deux listes et on obtiendra le PGCD des deux nombres en MULTIPLIANT entre eux tous ces diviseurs communs.
  Concrètement, cela signifie qu'il n'y aura aucun nombre plus grand que ce PGCD qui permettra de diviser chacun des deux nombres proposés.

Méthode

On cherche à calculer PGCD (882 ; 1134)

→ on décompose 882 et 1134 à l'aide des nombres premiers, et on va entourer les diviseurs qui se retrouvent dans les deux listes.

On obtient :

882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

1134	2
567	3
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

→ on obtient alors le PGCD (882 ; 1134).

Les diviseurs communs sont : 2 ; 3 ; 3 ; 7

On obtient :

$$\text{PGCD}(882 ; 1134) = 2 \times 3 \times 3 \times 7$$
$$= 126$$

Comment calculer le PGCD de deux nombres : des exemples

Vous allez avoir sur cette fiche des exemples qui vont vous permettre de vous entrainer à *savoir décomposer* un nombre entier avec des nombres premiers et à utiliser ces décompositions pour *calculer le PGCD* de ces deux nombres.

Exemple 1 : On cherche à calculer PGCD (128 ; 224)

→ on décompose 128 et 224 à l'aide des nombres premiers, et on va entourer les diviseurs qui se retrouvent dans les deux listes.

On obtient :

128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

224	2
112	2
56	2
28	2
14	2
7	7
1	

→ on obtient alors le PGCD (128 ; 224).

On a $PGCD(128 ; 224) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

Exemple 2 : On cherche à calculer PGCD (1092 ; 780)

→ on décompose 1092 et 780 à l'aide des nombres premiers, et on va entourer les diviseurs qui se retrouvent dans les deux listes.

On obtient :

1092	2
546	2
273	3
91	7
13	13
1	

780	2
390	2
195	3
65	5
13	13
1	

→ on obtient alors le PGCD (1092 ; 780).

On a $PGCD(1092 ; 780) = 2 \times 2 \times 3 \times 13 = 156$

Un problème de référence utilisant le PGCD

Les problèmes mettant en jeu le calcul du PGCD ont des énoncés qui se ressemblent et que vous devez savoir reconnaitre :

- ces problèmes utilisent forcément *deux nombres entiers*
- il y a toujours la notion de "*plus grand nombre de ....*", de "*nombre maximum de ...*" ou de "*nombre maximal de ...*"
- il y a aussi toujours un mot du type "*même*" ou "*égal*" ou ....

Une fois ce type d'énoncé reconnu, vous devez calculer le PGCD des deux nombres et vous devez ensuite l'utiliser pour bien répondre aux questions posées.

Exemple (d'après Brevet)

Guillaume veut répartir la totalité de 760 dragées au chocolat et 1045 dragées aux amandes dans des sachets ayant la ***même répartition*** de dragées au chocolat et aux amandes.
On cherche à savoir quel est le ***nombre maximal*** de sachets que Guillaume peut réaliser, et quelle sera alors la composition de chaque sachet (c'est à dire combien y aura t'il de dragées au chocolat et de dragées aux amandes dans chaque sachet).

*Les mots **en gras** et **en italique** nous permettent de reconnaitre un énoncé qui amène à utiliser le PGCD.*

On cherche donc à calculer PGCD (760 ; 1045)

→ on décompose 760 et 1045 à l'aide des nombres premiers, et on va entourer les diviseurs qui se retrouvent dans les deux listes.

On obtient :

$$\begin{array}{r|l} 760 & 2 \\ 380 & 2 \\ 190 & 2 \\ 95 & 5 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1\,045 & 5 \\ 209 & 11 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

→ on obtient alors le PGCD (760 ; 1045).

On a $PGCD(760 ; 1045) = 5 \times 19 = 95$

→ conclusions

On peut donc faire au maximum 95 sachets.

On calcule alors $760 : 95 = 8$

$1045 : 95 = 11$

→ chaque sachet sera composé de 8 dragées au chocolat et 11 dragées aux amandes.