Equation produit nul : définition et méthode

Ce chapitre qui concerne les *équations produit nul* ou *équations produit égal à zéro* est soumis à des règles très précises. On est dans une partie du programme très spécifique, qui ne s'appliquera qu'avec des équations très particulières.

Qu'est ce qu'une équation produit nul ?

Une *équation produit nul*, c'est un *produit* de plusieurs facteurs, de plusieurs termes (en général, ce sont des parenthèses) et on cherche les valeurs de x pour que le résultat final du produit soit *égal à zéro*.

→ l'équation $(3x + 12)(2x - 6) = 1$ ***N'EST PAS*** une *équation produit nul* car, même si on a bien un produit de facteurs, le résultat final est ici égal à 1 et non pas à 0.
→ l'équation $(3x + 12) + (2x - 6) = 0$ ***N'EST PAS*** une *équation produit nul* car, même si le résultat final est bien égal à 0, on n'a pas de produit de facteurs mais une somme.
→ l'équation $(3x + 12)(2x - 6) = 0$ ***EST*** une *équation produit nul* car on a bien un produit de facteurs et le résultat final est bien égal à 0.

La phrase à apprendre par coeur

Elle sera à répéter à chaque fois que vous résoudrez une *équation produit nul*.

Un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul

Le principe

Il est très simple à comprendre : pour que le résultat d'une multiplication (d'un produit) soit égal à zéro, il faut forcément qu'un des temes multipliés soit égal à zéro.
→ *impossible d'obtenir zéro avec une multiplication si il n'y a pas de zéro DANS cette multiplication !*

La méthode de résolution d'une équation produit nul

On veut résoudre l'équation produit nul suivante : $(3x + 12)(2x - 6) = 0$
→ étape 1 : on reconnait une *équation produit nul* et on écrit la phrase "un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul".
→ étape 2 : on indique alors que, soit le *premier facteur est nul* et on résout l'équation $3x + 12 = 0$, soit le *deuxième facteur est nul* et on résout l'équation $2x - 6 = 0$.

On résout maintenant cette équation $(3x + 12)(2x - 6) = 0$

→ on reconnait une équation produit nul
→ un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul
→ on a : $3x + 12 = 0$ ou $2x - 6 = 0$

$3x = -12$ $\quad$ $2x = 6$
$x = -12 : 3$ $\quad$ $x = 6 : 2$
$x = -4$ $\quad$ $x = 3$

Il y a donc deux solutions : -4 et 3.
On peut le noter $S = \{-4 ; 3\}$ ← ensemble solution qui s'écrit avec des accolades

On peut vérifier, qu'en remplaçant x par -4 , on obtient $(3\times(-4) + 12)(2\times(-4) - 6) = 0 \times (-14) = 0$
et en remplaçant x par 3 , on obtient $(3\times 3 + 12)(2\times 3 - 6) = 21 \times 0 = 0$

Comment résoudre une équation produit nul : des exemples

Exemple 1 : on veut résoudre l'équation suivante $(5x-10)(2x-8)=0$

→ on reconnait une équation produit nul

→ un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul

→ on a : $5x-10=0$ ou $2x-8=0$

$5x=10$ $\quad$ $2x=8$

$x=10:5$ $\quad$ $x=8:2$

$x=2$ $\quad$ $x=4$

Il y a deux solutions : 2 et 4 → $S=\{2;4\}$

Exemple 2 : on veut résoudre l'équation suivante $(6x+12)(x-6)=0$

→ on reconnait une équation produit nul

→ un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul

→ on a : $6x+12=0$ ou $x-6=0$

$6x=-12$ $\quad$ $x=6$

$x=-12:6$

$x=-2$

Il y a deux solutions : -2 et 6 → $S=\{-2;6\}$

Exemple 3 : on veut résoudre l'équation suivante $x(x-1)(x-2)=0$

→ on reconnait une équation produit nul

→ un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul

→ on a : $x=0$ ou $x-1=0$ ou $x-2=0$

$x=1$ $\quad$ $x=2$

Il y a <u>trois</u> solutions : 0 et 1 et 2 → $S=\{0;1;2\}$

Exemple 4 : on veut résoudre l'équation suivante $4x(3x-5)=0$

→ on reconnait une équation produit nul

→ un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul

→ on a : $4x=0$ ou $3x-5=0$

$x=0:4$ $\quad$ $3x=5$

$x=0$ $\quad$ $x=\frac{5}{3}$

on garde la valeur exacte, pas de valeur approchée

Il y a deux solutions : 0 et $\frac{5}{3}$ → $S=\{0;\frac{5}{3}\}$

Comment factoriser une expression et obtenir une équation produit nul

Le principe de base

On va utiliser une phrase, qui n'est pas parfaitement mathématiques, mais qui illustre bien ce principe :
Factoriser, c'est l'inverse de dévélopper

Cela signifie tout simplement que :

- quand on passe de $3(2x+5)$ à $6x+15$, on ***développe*** l'expression.
- et quand on fait le chemin "inverse" en passant de $6x+15$ à $3(2x+5)$, alors on ***factorise***.

*$6x+15$ s'appelle l'expression **développée** et $3(2x+5)$ s'appelle l'expression **factorisée**.*

La méthode générale

On va chercher ce qu'on appelle un *facteur commun* (que l'on va entourer ou souligner pour bien le voir). Ce facteur commun doit se retrouver "***comme étant multiplié***" dans TOUS les termes de l'expression. Une fois ce facteur commun déterminé, il faudra le placer devant une parenthèse que l'on créera , et on finira le travail en mettant dans la parenthèse "tout ce qui reste".

Factorisation par un nombre

Il suffit de trouver un facteur commun présent dans tous les termes. Il faut donc bien connaitre ses tables !

on écrit ce qui reste dans la parenthèse

On a : $6x+15 = \boxed{3}\times 2x + \boxed{3}\times 5 = \boxed{3}\times(2x+5)$

Facteur commun que l'on place devant la parenthèse

on écrit ce qui reste dans la parenthèse

On a : $15x-20 = \boxed{5}\times 3x - \boxed{5}\times 4 = \boxed{5}\times(3x-4)$

Facteur commun que l'on place devant la parenthèse

Factorisation par une lettre

Le *facteur commun* sera donc une lettre. La factorisation ne sera possible que si cette lettre (x, par exemple) se retrouve bien dans tous les termes. Et c'est avec cette expression factorisée qu'il y aura ensuite un lien avec les *équations produit nul*.

On a : $7x^2+6x = 7x\times\boxed{x} + 6\times\boxed{x}$
$= \boxed{x}\times(7x+6)$

Le facteur commun est la lettre x.

On a : $x^2-4x = x\times\boxed{x} - 4\times\boxed{x}$
$= \boxed{x}\times(x-4)$

Le facteur commun est la lettre x.

On a : $8x^2+x = 8x\times\boxed{x} + 1\times\boxed{x}$
$= \boxed{x}\times(8x+1)$

Le facteur commun est la lettre x.

Factoriser puis résoudre une équation produit nul : des exemples

Pour le moment, en classe de 3e, on ne peut pas résoudre *directement* certaines équations. On aura alors besoin d'effectuer une factorisation pour faire apparaitre une *équation produit nul* (que l'on peut résoudre).

Exemple 1 : ***on veut résoudre l'équation $4x^2 - 6x = 0$***

→ on *factorise* l'expression $4x^2 - 6x$ par la lettre x .

On a : $4x^2 - 6x = 4x \times \boxed{x} - 6 \times \boxed{x} = \boxed{x} \times (4x - 6)$

Facteur commun que l'on place devant la parenthèse

→ l'équation devient $x(4x - 6) = 0$ et on reconnait une *équation produit nul.*

Un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul

→ on a : $x = 0$ ou $4x - 6 = 0$

$4x = 6$

$x = 6 : 4 \rightarrow x = 1,5$

Il y a deux solutions : 0 et 1,5 → $S = \{0 ; 1,5\}$

Exemple 2 : ***on veut résoudre l'équation $7x^2 + 6x + 4 = 2x^2 + 4x + 4$***

→ on regroupe tout à gauche en "*faisant passer*" les termes du membre de droite.

$7x^2 - 2x^2 + 6x - 4x + 4 - 4 = 0$

soit $5x^2 + 2x = 0$

→ on peut maintenant *factoriser* l'expression $5x^2 + 2x$ par la lettre x .

On a : $5x^2 + 2x = 5x \times \boxed{x} + 2 \times \boxed{x} = \boxed{x} \times (5x + 2)$

Facteur commun que l'on place devant la parenthèse

→ l'équation devient $x(5x + 2) = 0$ et on reconnait une *équation produit nul.*

Un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul

→ on a : $x = 0$ ou $5x + 2 = 0$

$5x = -2$

$x = -2 : 5 \rightarrow x = -0,4$

Il y a deux solutions : 0 et -0,4 → $S = \{-0,4 ; 0\}$

Exemple 3 : ***on veut résoudre l'équation $(x + 2)(x + 3) = 6$***

→ on développe puis on regroupe tout à gauche en "faisant passer" le nombre 6.

On obtient : $x^2 + 2x + 3x + 6 = 6 \rightarrow x^2 + 5x = 0$

→ on peut maintenant *factoriser* l'expression $x^2 + 5x$ par la lettre x .

On a : $x^2 + 5x = x \times \boxed{x} + 5 \times \boxed{x} = \boxed{x} \times (x + 5)$

Facteur commun que l'on place devant la parenthèse

→ l'équation devient $x(x + 5) = 0$ et on reconnait une *équation produit nul.*

Un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul

→ on a : $x = 0$ ou $x + 5 = 0$

$x = -5$

Il y a deux solutions : 0 et -5 → $S = \{-5 ; 0\}$

ensemble solution

Factorisation avec identités remarquables et équation produit nul

Nous allons revoir rapidement les résultats obtenus en *factorisant les identités remarquables* (pour plus de précisions et d'exemples, vous avez un chapitre de 3e, sur ce site, avec des fiches méthodes).
En effet, dans certains cas très particuliers, l'équation proposée ne peut se factoriser qu'avec ces IR (Identités Remarquables) et on pourra alors appliquer les résultats obtenus sur les *équations produit nul*.

Un rappel des trois identités remarquables

On a : $4x^2 + 20x + 25 = IR1 = (2x+5)^2$

On a : $4x^2 - 20x + 25 = IR2 = (2x-5)^2$

On a : $4x^2 - 25 = IR3 = (2x-5)(2x+5)$

Applications

Exemple 1* : *on veut résoudre l'équation $25x^2 - 64 = 0$

→ on *factorise* l'expression $25x^2 - 64$ avec une identité remarquable (qui correspond ici à IR3) .

On a : $25x^2 - 64 = IR3 = (5x-8)(5x+8)$

→ l'équation devient $(5x-8)(5x+8) = 0$ et on reconnait une *équation produit nul.*

→ un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul

On a : $5x - 8 = 0$ ou $5x + 8 = 0$

$5x = 8$ $\qquad$ $5x = -8$

$x = 8 : 5$ $\qquad$ $x = -8 : 5$

$x = 1,6$ $\qquad$ $x = -1,6$

Il y a deux solutions : $-1,6$ et $1,6$ → $S = \{-1,6 ; 1,6\}$

Exemple 2* : *on veut résoudre l'équation $4x^2 - 12x + 9 = 0$

→ on *factorise* l'expression $4x^2 - 12x + 9$ avec l'identité remarquable (qui correspond ici à IR2) .

On a : $4x^2 - 12x + 9 = IR2 = (2x-3)^2$

→ l'équation devient $(2x-3)^2 = 0$ et on reconnait une *équation produit nul* (un peu particuière).

Il n'y a en fait qu'un seul facteur dans $(2x-3)^2$
Donc seul le facteur $2x-3$ peut être égal à zéro.

On a : $2x - 3 = 0$

$2x = 3$

$x = 3 : 2$ → $x = 1,5$

Il y a une seule solution : $1,5$ → $S = \{1,5\}$